Финансирование накопительных пенсий: актуарные методы и динамические модели*

Шоломицкий А.Г.†

13 ноября 2002 г.

Статья представляет собой обзор современного состояния пенсионной математики – от традиционных „невероятностных“актуарных методов финансирования до стохастических моделей пенсионных систем как систем с динамическим управлением. Приводятся примеры актуарных расчетов и результаты стохастического моделирования. Описываются также методы оценки активов пенсионных фондов.

Ключевые слова: пенсия, взнос, фонд, активы, доходность, аннуитет, актуарный метод финансирования, нормальная цена, накопленная ответственность, нефинансируемая ответственность, динамическое управление, сценарий.

*Препринт. Статья будет опубликована в журнале „Обозрение прикладной и промышленной математики“. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, гранты 00-01-00194 и 02-01-08058, и РАН, грант 105 по 6-му конкурсу-экспертизе научных проектов молодых ученых РАН.

†Центральный экономико-математический институт РАН и ГУ Высшая школа экономики. 117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47; ags@cemi.rssi.ru; www.hse.ru/persona/sholom.htm.

1 Введение: накопительные пенсии и их финансирование

Пенсионная реформа, по-видимому, способна оказать большее влияние на жизнь большинства ныне живущих в России людей, чем едва ли не любой из других проектов, рассматриваемых ныне в Правительстве или Думе. С точки зрения актуария, пенсионная реформа – перевод государственной пенсионной системы с распределительного на частично накопительное финансирование – пример изменения того, что принято называть методом финансирования пенсий. В актуарной практике Запада под *актуарным методом финансирования* (funding method, actuarial cost method) понимают бюджетный план формирования накоплений пенсионного фонда, или принципиальную схему взносов, предназначенных для финансирования пенсий. В странах, где накопительные пенсионные системы (профессиональные, корпоративные, муниципальные и др.) существуют давно, применение таких методов разработано весьма подробно и практически, и теоретически. Метод финансирования определяет план внесения платежей и создания резервов. Так, при одних методах финансирования могут создаваться большие, при других – меньшие резервы (вплоть до нулевого при распределительном, PAYG, методе); деньги будущих пенсионеров могут „работать“, принося инвестиционный доход, более или менее долгий срок, и т.д. Многообразие существующих вопросов сводится к одному: как формировать пенсионный фонд, имея в виду обеспечение адекватного уровня пенсий? Методы финансирования описывают не только план такого формирования, но и предусматривают механизмы его более или менее „автоматической“корректировки в случае отклонений за счет колебаний случайных факторов (инфляции, инвестиционной доходности и стоимости активов, зарплат, смертности и т.п.). Стандартизация методов финансирования позволяет стандартизировать работу актуария (например, при периодическом актуарном оценивании пенсионных фондов, предписанном и в нашей стране) и дает возможность точного ответа на такие вопросы, как: сколько денег должно быть в фонде на данный момент? сколько требуется довнести при недофинансировании и как разработать график внесения? какова сумма взносов в фонд? и т. д. Это позволяет наладить четкое актуарное оценивание, поставить его „на конвейер“, создает нормативную базу для решения споров и исключения злоупотреблений. Такая стандартизация в актуарной профессии совершенно необходима.

Например, в США так называемый Employee Retirement Income Security Act (ERISA), принятый Конгрессом в 1974 г., регламентирует методы финансирования, которыми актуарий может пользоваться при расчетах взносов в пенсионный фонд. (В частности, все методы финансирования, расчеты по которым приведены в таблице 2, разрешены этим Актом к применению.) Таким образом, расчет плана-графика формирования накоплений пенсионного фонда становится рутинной (в хорошем смысле) задачей. Если через десять лет данный фонд будет проверять другой актуарий, он без труда сможет, зная, что применялся определенный стандартный актуарный метод, проверить правильность и адекватность финансирования пенсионного фонда. Если бы, с другой стороны, актуарии должны были (или, по крайней мере, имели бы право) изобретать методы финансирования, это могло бы привести если не к хаосу, то к большим затратам труда на понимание друг друга. Собственно говоря, методы финансирования, предписанные ERISA, и есть наиболее популярные среди актуариев по тем или иным причинам, т.е. акт Конгресса узаконил уже во многом сложившуюся к тому времени „стандартизацию".

Нижеследующее изложение строится следующим образом. В разделах 2 – 7 дается введение в теорию методов пенсионного финансирования. Раздел 8 посвящен методам оценки активов пенсионных схем. Материал этих разделов представляет изложение основных идей и методов традиционной „невероятностной"пенсионной актуарной математики. Приводятся формулы и примеры расчетов. Остальные четыре раздела посвящены современным направлениям развития пенсионной математики. В разделах 9 и 10 описаны некоторые теоретические модели со стохастическими элементами и динамическим управлением, в разделах 11 и 12 – практически-ориентированные методы сценарного, стохастического и динамического моделирования, применяемые для динамического финансового анализа пенсионных схем.

В основном будут рассматриваться пенсионные схемы *с определенными выплатами (пособиями)* (defined benefit, DB), где уровень взносов рассчитывается исходя из будущего уровня пенсий. В то же время нужно отметить, что с математической точки зрения нет большого различия между актуарными методами для таких схем и для схем *с определенными взносами* (defined contribution, DC), где расчет пенсий производится исходя из уровня взносов. Однако существенно различие не в методах, а в отношении к актуарным расчетам: для первого типа схем актуарные оценки носят обязательный, а для второго – скорее рекомендательный характер. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что в схеме с определенными взносами риск несет не учредитель схемы (как правило, это работодатель), а сами участники. Поэтому методы расчетов в схемах с определенными выплатами обычно сложнее, так как включают в себя способы корректировки взносов в случае пере- или недофинансирования фонда (раздел 5 ниже). Некоторые методы и примеры расчетов для схем с определенными взносами можно найти в разделах 7 и 12.

2 Модель и терминология

Основополагающие статьи по теории пенсионного финансирования написаны Троубриджем (Trowbridge, 1952, 1963). Следуя этим работам, рассмотрим сначала так называемую „стационарную“или „зрелую“популяцию (stationary, mature population) *участников* – как работающих, так и пенсионеров – некоторого пенсионного фонда (пенсионной схемы). Под стационарной популяцией в демографии понимают популяцию устойчивой численности N с соотношениями численностей поколений (возрастных когорт), совпадающим с соотношениями чисел доживших, взятыми из актуарной таблицы смертности. В модели стационарной популяции современное состояние популяции как бы „замораживается“, демографические тенденции (например, будущее старение населения) не учитываются.

Рассмотрим дискретную модель, в которой как время t, так и возраст x, в котором могут находиться участники схемы, принимают целые неотрицательные значения (в годах). Пусть $s(t,x)$ – число участников пенсионной схемы, в момент t находящихся в возрасте x. Если популяция стационарна, то для любого t $s(t,x) = s(x)$ – функции дожития, т.е. числу членов популяции, доживших до возраста x; $\frac{s(x+k)}{s(x)}$ – доля тех, кто, достигнув возраста x, проживет еще k лет – совпадает с актуарной вероятностью дожития ${}_kp_x$. Будем считать, что все участники вступают в схему в начальном возрасте a лет и выходят на пенсию в возрасте R лет. Смертность членов пенсионной схемы восполняется ежегодным вступлением новых членов возраста a.

Рассмотрим пенсионную схему с определенными пособиями, в которой пенсии участников (например, работников некоторой компании) зависят от уровня их заработной платы. Введем годовую ставку безынфляционной инвестиционной доходности r. Расчеты будут автоматически вестись в реальных ценах, учитывая индексацию пенсий и зарплаты в соответствии с инфляцией. Для простоты предположим, что единственная причина выбытия из популяции – смертность, единственный вид пенсий – пенсии по старости, выплачиваемые начиная с возраста R (одинакового для мужчин и женщин). Последние упрощения, как будет ясно из дальнейшего, несущественны для нашей цели – изучения методов финансирования, поскольку метод финансирования пенсии никак не зависит от ее природы и методов расчета. Единственное, что фактически требуется знать - это актуарная современная стоимость (actuarial present value, APV) будущего пособия, в которую при необходимости могут быть включены нужные слагаемые (например, пенсии по инвалидности, утрате кормильца, выходные пособия, льготы малообеспеченным и т.д.), однако это потребовало бы учета частот (вероятностей) получения того или иного пособия, т.е. усложнило бы актуарный базис. Расчет актуарных стоимостей различных сложных пенсионных пособий описан, например, Чэдберном и Хэберманом (1996), Баскаковым и Баскаковой (1998).

Предположим, что правила расчета пенсий по старости одинаковы для всех членов схемы. Например, пенсия может составлять одинаковую для всех долю λ от заработка за некоторый период (последний год работы, последние несколько лет, вся карьера, несколько лучших лет и т.п.). В этом случае пенсии не зависят от дифференциации заработной платы среди работников одного возраста, и можно считать, что в начальный момент ($t = 0$) все работающие участники схемы одного возраста x получают одинаковую (среднюю) заработную плату $w(0, x) = w(x)$. Для последующих лет предусмотрим ежегодное повышение заработной платы всех возрастов в связи с ростом производительности труда: плата работника возраста x в момент t есть $w(t, x) = e^{\alpha t} w(x),\ \alpha \geq 0$.

Для простоты будем считать будущую пенсию постоянной и выплачиваемой в форме аннуитета с выплатами в начале каждого года жизни начиная с момента достижения пенсионного возраста R. Тогда APV пенсии одного работающего („активного“) индивидуума, вступившего в схему в момент 0, на момент достижения им возраста x лет есть

$$(aA)(x) = v^{R-x} \frac{s(R)}{s(x)} b(R-a) \ddot{a}_R,$$

где $v = (1 + r)^{-1}$ – коэффициент дисконтирования, $b(R - a)$ – годовая пенсионная выплата участника, вступающего в схему в момент 0 и достигающего пенсионного возраста в момент $R-a$, $\ddot{a}_R$ – пожизненный аннуитет[1]. Здесь и ниже в отношении индивидуальных взносов/пенсий используется схема обозначений Бауэрса и др. (1997); так, символ a слева от основного символа обозначает отношение к активным (работающим) участникам (не путать с возрастом вступления a).

Размер пенсии $b(\cdot)$ зависит от момента вступления (или выхода на пенсию), так как предполагается изменение всех зарплат со временем.

Взносы в пенсионную схему могут вноситься как работающими участниками, так и спонсором (работодателем); для краткости мы будем говорить просто о *взносах*, обозначая C_t суммарный взнос, вносимый в момент $t = 0, 1, 2, \ldots$. Обозначим B_t пенсии, выплачиваемые из фонда в момент t, F_t – величину накопленного пенсионного фонда на момент t (до выплаты пенсий и поступления взносов). Тогда

$$F_{t+1} = (1+r)(F_t + C_t - B_t). \tag{1}$$

Это основное соотношение, описывающее динамику фонда.

Ключевыми понятиями теории пенсионного финансирования являются понятия *нормальной цены* (normal cost) NC_t и *накопленной ответственности* (accrued liability) AL_t. Представим себе схему, которая не имеет никаких проблем с финансированием, т.е. обладает безгранично богатым спонсором, всегда готовым вносить в схему деньги. Нормальная цена и накопленная ответственность представляют собой, соответственно, взнос, который актуарий попросил бы спонсора внести при выбранном методе финансирования, и размер фонда, который бы он поддерживал. Нормальная цена и накопленная ответственность дают, таким образом, „идеальные“значения C_t и F_t. Они должны, конечно, удовлетворять уравнению (1), т.е.

$$AL_{t+1} = (1+r)(AL_t + NC_t - B_t). \tag{2}$$

Это уравнение иногда называют уравнением равновесия; оно выражает „идеальный“баланс фонда. На каждый момент времени накопленная ответственность может быть вычислена как разность APV будущих пенсионных пособий и APV будущих нормальных цен.

[1]Расшифровка использованных актуарных обозначений приводится в Приложении; см., например, (Гербер, 1995).

В реальности пенсионные схемы не имеют ни бесконечно богатых спонсоров, ни „идеальных“, т.е. стационарных и полностью предсказуемых демографических и экономических условий. По первой причине планируется *постепенный* выход на „идеальный“режим финансирования или приближение к нему. Разность

$$UL_t = AL_t - F_t \tag{3}$$

называется *нефинансируемой ответственностью* (unfunded liability) схемы. Значение UL_0 называется *начальной нефинансируемой ответственностью* (initial unfunded liability). Это сумма, которую в принципе требуется внести в схему при ее организации. Актуарий планирует ее постепенное погашение, таким образом, в схеме может существовать „плановая“нефинансируемая ответственность. С другой стороны, различные отклонения параметров (смертности, инвестиционной доходности, заработной платы, взносов) от прогнозных актуарных значений могут приводить к возникновению дополнительной, так сказать, „незапланированной“нефинансируемой ответственности. Оба вида нефинансируемой ответственности могут трактоваться как совместно, так и отдельно. При первом подходе (традиционном для Великобритании) актуарий разрабатывает план дополнительных платежей всей суммы UL_t, независимо от ее источников. Второй подход, принятый в Северной Америке, состоит в выделении актуарного убытка (actuarial gain/loss) за период $[t-1, t]$

$$L_t = UL_t - \{\text{„плановое“значение } UL_t\} = UL_t - UL_t^A \tag{4}$$

и выработке отдельного плана его погашения. Здесь под „плановым“значением UL_t^A понимается ожидаемое актуарное значение, рассчитанное в момент $t-1$. Это значение, которое возникло бы при точном выполнении всех актуарных предположений. Дальнейшее изложение методов коррекции отклонений или актуарных убытков можно найти в разделе 5, а также в разделе 9.

3 Индивидуальные методы

При индивидуальных методах пенсионного финансирования вычисляются нормальные цены для каждого участника в отдельности. Если нужно определить, например, нормальную цену работодателя, то она получается суммированием индивидуальных нормальных цен, подлежащих внесению за каждого из работников.

Рассмотрим индивидуального участника, вступающего в схему в момент $t = 0$ в возрасте a. Пусть $P(x)$ – нормальная цена (идеальный взнос) этого участника для возраста x лет; будем считать, что взносы всех участников вносятся после каждого полного проработанного года, т.е. если a – возраст вступления в пенсионную схему, то первый взнос вносится в возрасте $(a+1)$. Согласно актуарному принципу эквивалентности взносов и обязательств, для получения адекватного уровня взносов APV взносов одного участника нужно приравнять APV пособий:

$$P(a+1)vs(a+1)+...+P(x)v^{x-a}s(x)+...+P(R)v^{R-a}s(R) = s(a)(aA)(a) \quad (5)$$

(здесь APV вычисляются на момент вступления).

В левой части (5) стоит сумма слагаемых, каждое из которых показывает „вклад“в сумму пенсии, даваемый данным годом. Иногда эти величины называют *ценой страхового года* (Баскаков и Баскакова, 1998). Индивидуальные методы финансирования удобно описывать в терминах относительных величин этих слагаемых, или „долей“общей пенсии. Следуя Куперу и Хикмену (Cooper and Hickman,1967), Бауэрсу и др. (1976, 1997), введем величину

$$m(x) = \theta P(x)v^{x-a}s(x),$$

где коэффициент θ определяется из условия нормировки

$$\sum_{x=a+1}^{R} m(x) = 1. \quad (6)$$

Тогда сумма

$$M(x) = \sum_{t=a+1}^{x} m(t)$$

показывает *долю* пенсии, подлежащую оплате, или „покупке“, на момент достижения возраста x; поэтому Купер и Хикмен (1967) называют $M(x)$ *кумулятивной функцией покупки пенсии* (cumulative pension purchase function). При этом $m(x)$ – доля пенсии, „покупаемой“в возрастной год x, т.е. *интенсивность покупки пенсии.*

Как легко видеть, нормальная цена

$$P(x) = (aA)(x)m(x),$$

а накопленная ответственность

$$(aV)(x) = (aA)(x) - \sum_{t=x+1}^{R} APV(P(t)) = (aA)(x)M(x).$$

Для получения последней формулы можно воспользоваться тем, что актуарная современная стоимость на момент x взноса $P(x+k)$

$$APV(P(x+k)) = (aA)(x)m(x+k)$$

(проверка этих формул предоставляется читателю).

Простейшими индивидуальными методами пенсионного финансирования являются *нормальные возраста вхождения* (entry age normal, EAN) и *индивидуальные с равномерными премиями* (individual level premium, ILP), при которых взносы раскладываются по годам равномерно ($P(x) = const.$) либо (чаще) как постоянная доля от заработной платы. В первом случае

$$m(x) = \theta s(x) v^{x-a}, \tag{7}$$

во втором

$$m(x) = \theta s(x) v^{x-a} w(x-a, x) \tag{8}$$

(коэффициенты θ в этих формулах различны и определяются, как и выше, из условия нормировки (6)).

Различие между EAN и ILP методами состоит в подходе к участникам, вступающим в схему в возрастах, бóльших a. При ILP сумма, необходимая для финансирования будущей пенсии, просто раскладывается равномерно по оставшимся до выхода на пенсию годам. При EAN же нормальные цены для вступающих позже начального возраста считаются так же, как для прочих работающих; при необходимости заработная плата „проектируется“назад к возрасту a, т.е. как бы считается, что участник работал с возраста a. При этом возникает, конечно, нефинансируемая ответственность, способ покрытия которой не регламентируется данным методом и зависит от правил пенсионной схемы. Так как в нашей упрощенной модели все участники вступают в возрасте a, различий между EAN и ILP методами нет, поэтому ниже говорится только о EAN методах.

Названные выше методы – представители семейства так называемых методов возраста вхождения (entry age), называемых также методами *проектируемых пособий* (projected benefit cost methods). Дело в том, что на практике будущий размер пенсии обычно зависит от заработной платы в течение карьеры и поэтому не известен заранее. Указанные методы основаны на „проектировании“пенсии и затем „раскладке“ее оплаты по годам карьеры. Однако в случае отклонений заработной платы от проектируемых значений возникают проблемы недо- или перефинансирования пенсий. Как правило, на практике не удается сохранять пенсионные отчисления на уровне,например, постоянного процента от заработной платы.

В США и Канаде популярны более гибкие *методы заработанных пособий* (accrued benefit cost methods), основанные на расчете „заработанной части“будущих пенсий. В наиболее „чистом“виде этого метода „заработанной“в возрасте x считается пенсия, размер которой рассчитывается путем применения существующих правил пенсионной схемы. Например, пенсия может рассчитываться путем умножения числа лет стажа на финальную (среднюю, среднюю по некоторым годам) заработную плату с некоторым коэффициентом. В дальнейшем остановимся на первом принципе (финального заработка). Обычно методы финансирования все-таки используют элементы „проектирования“(projecting). Так, наращивание „заработанного“пособия пропорционально числу лет стажа приводит к популярному методу *стандартного кредита* (unit-credit method). При этом $m(x)$ постоянна, а именно

$$m(x) = \frac{1}{R-a}, \tag{9}$$

то есть за каждый год „зарабатывается“одна и та же доля пенсии. При этом

$$M(x) = \frac{x-a}{R-a}.$$

Если же считать функцию $M(x)$ пропорциональной не только числу лет стажа, но и заработной плате:

$$M(x) = \frac{x-a}{R-a} \cdot \frac{w(x-a,x)}{w(R-a,a)},$$

то получим

$$m(x) = \theta[(x-a)w(x,x) - (x-1-a)w(x-1,x-1)]. \tag{10}$$

Предлагая различные формы функции $m(x)$, можно „конструировать“различные методы финансирования, отвечающие тем или иным желаемым свойствам. Для примера рассмотрим два из предложенных Купером и Хикменом (1967) методов: „линейный“, когда

$$m(x) = \theta(1 + 0,3 \cdot (x - a)), \tag{11}$$

а также „экспоненциальный метод с ускорением“(exponential accelerating):

$$m(x) = \theta e^{0,05 \cdot (x-a)}. \tag{12}$$

Если взять коэффициент в показателе экспоненты отрицательным, то получится метод с замедлением (deccelerating), т.е. с уменьшением темпа „покупки пенсии“. Интересно отметить, что EAN-методы, описанные выше, при которых вносятся равномерные в течение всей карьеры взносы, на самом деле относятся к методам с „замедлением“, т.е. пенсия покупается наиболее интенсивно в начале карьеры.

Построить „чистый“accrued benefit метод, т.е. совсем без использования проектирования зарплаты, можно, например, следующим образом. Возьмем за основу unit-credit метод. Будем вычислять современную стоимость пенсии на основе *текущей* (а не „спрогнозированной“) зарплаты, полагая

$$(aA)(x) = v^{R-x} \frac{s(R)}{s(x)} \lambda w(x-a, x) \ddot{a}_R,$$

где λ – некоторый коэффициент (он может зависеть от стажа).

Будем вычислять нормальные цены, руководствуясь unit-credit методом, как описано выше. Взнос за первый год (вносимый в момент $a+1$) вычислим согласно этой нормальной цене. В случае, например, повышения зарплаты в следующем году возникнет нефинансируемая ответственность, так как взнос $C(a+1)$, поступивший в предыдущий год, уже не соответствует переоцененной нормальной цене $P(a+1)$. Другими словами, фактический фонд одного участника на момент $a+2$ (до внесения взноса) должен составлять $(1+r)P(a+1)\frac{s(a+1)}{s(a+2)}$, а на самом деле он составляет $(1+r)C(a+1)\frac{s(a+1)}{s(a+2)}$. Разность равна

$$(UL)(a+2) = (1+r)[P(a+1) - C(a+1)]\frac{s(a+1)}{s(a+2)}$$

Можно покрыть этот дефицит в течение нескольких лет; однако самый простой путь состоит во включении его во взнос уже года $a+2$ (т.е.

немедленном покрытии). Для последующих лет также вычислим „дефициты“– разности между накопленной актуарной ответственностью, соответствующей unit-credit методу, и фактическими фондами, и включим их во взносы того же года:

$$\begin{aligned} C(a+2) &= P(a+2) + (UL)(a+2), \\ C(a+3) &= P(a+3) + (UL)(a+3), \\ &\ldots, \\ C(R) &= P(R) + (UL)(R), \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$(UL)(x) = (aA)(x)\frac{x-a}{R-a} - \sum_{t=a+1}^{x-1}(1+r)^{x-t}[P(t)-C(t)]\frac{s(t)}{s(x)}.$$

Кроме указанных, необходимо отметить два „крайних“метода финансирования: *начальное финансирование* (initial funding), при котором вся необходимая сумма для обеспечения пенсии работника вносится в момент его вступления в схему (т.е. в возрасте a) и *терминальное финансирование* (terminal funding), когда эта сумма вносится в момент выхода на пенсию (в возрасте R). По многим, достаточно очевидным, причинам нельзя ожидать массового применения этих методов на практике.

Если NC_t^x и AL_t^x – соответственно нормальная цена и накопленная ответственность одного участника при том или ином индивидуальном методе, то суммарная нормальная цена и накопленная ответственность получаются, как сказано выше, суммированием по всем участникам:

$$NC_t = \sum_{x=a+1}^{R} NC_t^x s(t,x),$$

$$AL_t = \sum_{x=a+1}^{\infty} AL_t^x s(t,x).$$

Полезно сравнить различные методы финансирования на численном примере. Примем за начальный момент времени ($t = 0$) начало 2001 года. Ниже приведены результаты расчетов, выполненных для стационарной популяции членов некоторого пенсионного фонда численностью 10 000.

Численность поколений рассчитана по таблице продолжительности жизни населения России за 1995 г. (мужчины и женщины), построенной по данным Госкомстата[2]. Указанные данные содержали информацию о численности возрастных групп в возрасте до 80 лет, поэтому была сделана экстраполяция с помощью закона Гомпертца до возраста 100 лет. Как сказано выше, все расчеты велись в рублях 2001 года; ставка безынфляционной доходности инвестиций $r = 6\%$ годовых. Значение коэффициента ежегодного роста заработной платы за счет повышения производительности труда выберем 1,025 (рост всех зарплат на 2,5% в год). Таким образом, годовая заработная плата индивидуума возраста x, вступившего в схему в момент 0,

$$w(x-a, x) = (1,025)^{x-a} w(x),$$

где $w(x)$ – функция, показывающая распределение заработной платы по возрастам на начальный момент. Распределение заработной платы по возрастам в России и в других странах анализировалось Баскаковым и Баскаковой (1998); в данной работе взята более или менее типичная кривая, показанная на рис. 1. Средняя месячная зарплата по популяции на начальный момент 2894,64 руб., что примерно соответствует данным по Москве на начало 2001 г..

Расчеты производились для поколения (когорты) участников, вступающих в момент 0 (начало 2001 года). Возраст вступления в схему $a = 20$, пенсионный возраст $R = 60$ лет. Правило вычисления пенсии: правило конечной зарплаты с нормой (коэффициентом) замещения $\lambda = 0,35$, т.е.

$$b(t) = \lambda w(t, R) = \lambda (1,025)^t w(R).$$

Например, месячная пенсия выходящих на пенсию в конце 2001 года равна 1070,30 руб. Период капитализации – один год, т.е. месячные зарплаты и пенсии получаются простым делением годовых на 12. В таблице 1 приведены результаты (для выборочных лет) расчетов по методам, описанным выше. На рис. 2 показаны графики доли покупки пенсии $m(x)$ в виде непрерывных кривых. Видно, в частности, что EAN методы являются методами с „замедлением“. На рис. 3 показаны накопленные фактические резервы для когорты участников по годам. Можно сравнить темпы накопления для различных методов.

[2] Я хотел бы выразить благодарность студентке ГУ-ВШЭ А.Андроновой, подготовившей эту таблицу.

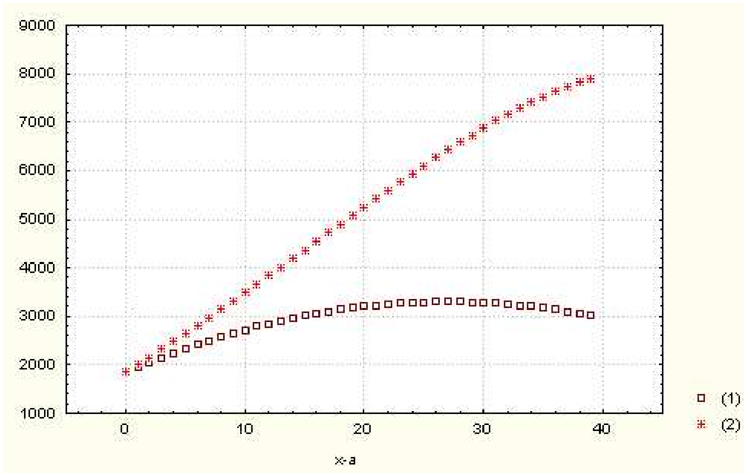

Рис. 1. Среднемесячная заработная плата (руб. 2001 г.) в зависимости от стажа $(x-a)$, лет:
(1) - начальная возрастная структура (функция $w(x)/12$),
(2) - с ежегодным ростом на 2,5%.

Из рис. 3 видно, что EAN методы обеспечивают наиболее быстрый рост пенсионных накоплений. Однако, с другой стороны, эти методы определенно меньше отвечают интересам работодателей (спонсоров), а именно работодатели часто определяют дизайн пенсионных планов. Не следует забывать, например, о том, что многие работодатели стремятся так или иначе использовать приобретение пенсионных прав для стимуляции работников. Действительно, руководитель компании вряд ли посчитает справедливым и нужным вносить одинаковые отчисления за молодого работника, проработавшего 2 года, и работника, проработавшего уже 20 лет. По многим причинам прогрессивный рост отчислений кажется более предпочтительным для работодателя. Эти соображения отчасти объясняют популярность unit-credit метода, занимающего (рис. 3) „среднее“положение по темпам роста фондов и при этом дающего (таблица 1) прогрессивное увеличение отчислений. Этот метод, что немаловажно, прост для расчетов, а кроме того отвечает представлениям о справедливости: каждый проработанный год позволяет „заработать“или „купить“одну и ту же долю будущей пенсии (рис. 2). Приведенный выше пример показывает, как можно модифицировать unit-credit (но, конечно, также и другие стандартные методы) для конструкции методов финансирования, отвечающих тем или иным заданным условиям, определяемым спецификой пенсионного фонда. Построенный в этом примере accrued benefit метод (13) хорош тогда, например, когда есть трудности в прогнозировании заработной платы и будущих пенсий, однако темпы накоплений для него (рис. 3) невысоки, т.е. он имеет тенденцию „переносить“взносы на более позднюю часть карьеры. Если взносы платятся не только работодателем, но и вычитаются из зарплаты работника, это может оказаться нежелательным. С другой стороны, в условиях неопределенности экономической ситуации есть вероятность обесценивания пенсионных накоплений, поэтому может оказаться разумным накапливать их медленнее... и т.д. – здесь просто невозможно охватить все соображения, которые могут играть свою роль при выборе метода финансирования пенсионной схемы.

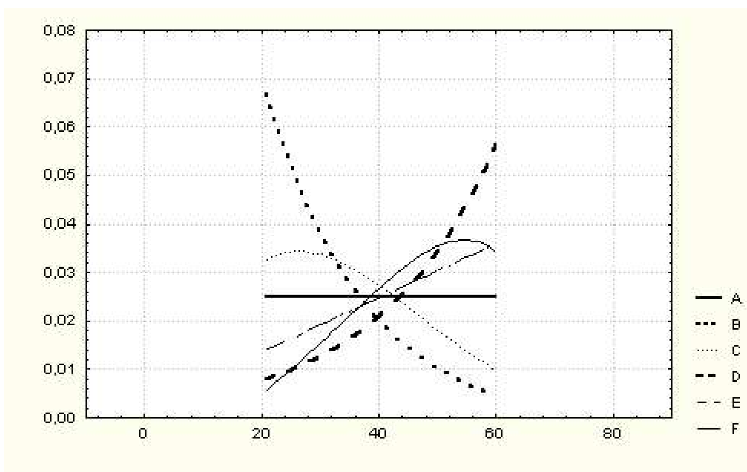

Рис. 2. Функция „покупки пенсии“$m(x)$:
A - unit-credit метод (9);
B - EAN метод с постоянными взносами (7);
C - EAN метод с постоянным процентом от заработной платы (8);
D - экспоненциальный с ускорением (12);
E - линейный (11);
F - метод (10).

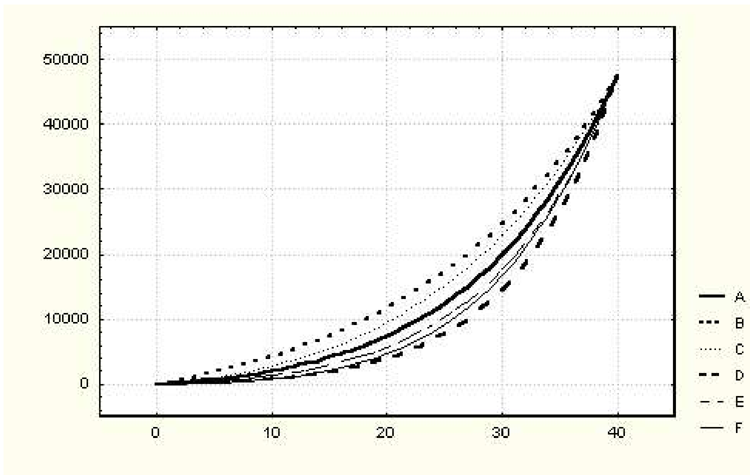

Рис. 3. Фонд пенсионных накоплений поколения работников (тыс. руб. 2001 г.) в зависимости от стажа (лет):

A - unit-credit метод (9);

B - EAN метод с постоянными взносами (7);

C - EAN метод с постоянным процентом от заработной платы (8);

D - экспоненциальный с ускорением (12);

E - линейный (11);

F - accrued benefit без проектирования (13).

4 Групповые методы

При *групповых методах финансирования* (group methods, aggregate methods) взносы в пенсионную схему определяются для всей группы участников в совокупности, т.е. безотносительно к тому или иному конкретному участнику.

Пусть $F = F_t$ – имеющийся пенсионный фонд, $C = C_t$ – взносы, $B = B_t$ – пенсионные пособия. Из (1), годовое приращение фонда

$$\Delta F = (1 + r)C + rF - (1 + r)B$$

(здесь и ниже предполагается, что взносы и пособия уплачиваются в начале года, а фонд измеряется тоже в начале года до уплаты пособий и взносов).

Если бы пенсионная схема функционировала в „стационарном режиме“, т.е. без изменений фонда, то левая часть уравнения стала бы нулем, поэтому

$$B = C + d \cdot F,$$

где $d = \frac{r}{1+r}$ – ставка дисконта. Такое „стационарное"функционирование возможно только в условиях стационарной (зрелой) популяции и без изменений пенсий во времени, поэтому Троубридж (1952) называет последнее уравнение „уравнением зрелости"(equation of maturity). Ясно, что при таком „стационарном"функционировании $F = AL$ и $C = NC$ (ср. (2) в разделе 2).

Предположим, что пенсионный фонд создается в 2001 году в уже действующей компании и предполагает некоторые обязательства по выплате пенсий всем работникам, выходящим на пенсию начиная с 2002 года. Для обеспечения начальной накопленной ответственности такому фонду потребуются значительные резервы, вносимые, как правило, спонсором (работодателем) в течение ряда лет. Амортизация этой начальной нефинансируемой накопленной ответственности может планироваться в течение какого-то срока, иногда так или иначе ограничиваемого законодательно (например, в Канаде предписывается погашение определенных видов нефинансируемой ответственности в течение не более чем 15 лет). Этот срок определяет, в сделанных выше „идеальных"предположениях, выход на „стационарный режим"функционирования, описываемый „уравнением зрелости".

В данном разделе, чтобы в расчетных примерах более явно виден был этот выход на „стационарный режим", положим $\alpha = 0$, т.е. не будем предполагать роста всех заработных плат со временем, как это делалось выше.

Троубридж (1952) классифицирует методы финансирования исходя из величин взносов C и фонда F по достижении схемой „стационарного режима", или величин NC и AL. Два крайних случая – распределительное финансирование (pay-as-you-go, PAYG), при котором не создается резервов ($F = 0$) и взносы в точности равны выплатам ($C = B$), и так называемое полное финансирование (complete funding), при котором пенсии выплачиваются только за счет инвестиционного дохода ($C = 0$).

Рассмотрим два широко применяемых на практике групповых метода: агрегатный (aggregate) и нормальный достигнутого возраста (attained age normal, AAN).

Принцип *агрегатного метода* заключается в приравнивании APV будущих пенсий к APV будущих взносов плюс имеющийся фонд. При этом взносы считаются так же, как если бы условный индивидуальный взнос участника (обозначим его c) был постоянным (или составлял постоянный процент от зарплаты). Наиболее важно то, что при этом *не принимаются в расчет* участники, вступление которых в схему ожидается в будущие годы. При постоянном c это дает

$$c \sum_{x=a+1}^{R} s(x) \ddot{a}_{x:\overline{R-x|}} = PVB - F, \tag{14}$$

где PVB – APV всех будущих пенсий, F – имеющийся фонд. Сумма в левой части (14) представляет собой „современную стоимость лет будущего рабочего стажа“. Для получения суммарного взноса следует умножить c, полученное из этого уравнения, на число работающих, взносы которых вносятся в данный момент,

$$C = c \cdot N_w = c \sum_{x=a+1}^{R} s(t,x).$$

Величину текущей стоимости пенсий можно записать как

$$PVB = \sum_{x=a+1}^{R-1} (aA)(x) s(x) + V_0,$$

где V_0 – APV пенсий участников, уже достигших пенсионного возраста. Поскольку правила учета пенсионных прав участников, проработавших часть своего стажа еще до создания пенсионной схемы или уже находящихся в пенсионном возрасте в этот момент, могут быть самыми различными, эта величина может рассчитываться по-разному (см. один из вариантов в расчетном примере ниже).

Для случая расчета взноса как постоянную долю от зарплаты, наиболее часто используемого на практике, полезно привести формулы в более общем виде, чтобы их применение не ограничиваось рассмотренной здесь простой моделью. Взнос

$$C_t = \frac{(PVB_t - F_t) W_t}{PVW_t}, \tag{15}$$

где W_t и PVW_t – соответственно фонд заработной платы данного года и современная (приведенная) стоимость будущих зарплат, при вычислении которой нужно считать только зарплаты, с которых производятся отчисления в пенсионную схему, и только участников начальной популяции. Запишем это в виде

$$
\begin{aligned}
W_\tau &= \sum_{x=a+1}^{R} w(\tau, x) s(\tau, x), \\
B_\tau &= \sum_{x=R}^{\infty} b(\tau, x) s(\tau, x), \\
PVW_t &= \sum_{\tau=t}^{\infty} W_\tau v^\tau \\
PVB_t &= \sum_{\tau=t}^{\infty} B_\tau v^\tau,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

считая $s(\tau, x)$ ожидаемым числом членов только начальной (года t) популяции участников, доживших до возраста x в году τ (подробнее см. раздел 6). Здесь $b(\tau, x)$ – годовая пенсия участников, находящихся в возрасте x в момент τ. Заметим, что при таком способе вычислений популяция участников схемы уже не обязательно является стационарной с момента $t = 0$. В принципе, можно задать любые значения $s(0, x)$. Суммирование теоретически ведется до бесконечности, на самом же деле, конечно, s становятся нулевыми после некоторого момента, определяемого предельным возрастом в таблице смертности.

Нормальный метод достигнутого возраста (attained age normal, AAN) основан на применении агрегатного финансирования лишь к той части пенсионных пособий, которую относят к *будущему стажу.* При этом деление индивидуальной пенсии на относящуюся к будущему и к прошлому стажу осуществляется как при unit-credit методе, т.е. просто пропорционально стажу. Так, в нашей модели „заработанная“пенсия участника непосредственно перед моментом достижения им возраста x должна составлять долю $\frac{x-a-1}{R-a}$ от полной пенсии. Эту долю и относят к прошлому стажу. Ее APV равно $\frac{x-a-1}{R-a}(aA)(x)$. Поэтому APV относящейся к будущему стажу пенсии всех участников

$$
v = \sum_{x=a+1}^{R} \frac{R - x + 1}{R - a} (aA)(x) s(x).
$$

Нужно также вычислить долю фонда f, относящуюся к будущему стажу. Для этого нужно вычислить фонд, относящийся к прошлому стажу, по unit-credit методу, и вычесть его из всего имеющегося фонда. Другими словами, f будет накопленной (с процентным доходом) суммой взносов *сверх* взносов, соответствующих unit-credit методу. Теперь к этим относящимся к будущему стажу величинам применяется агрегатный метод:

$$c \sum_{x=a+1}^{R} s(x) \ddot{a}_{x:\overline{R-x|}} = v - f, \tag{17}$$

откуда получаем c. Суммарный взнос равен cN_w.

Уравнения (14) и (17) дают рекуррентные процедуры расчета взносов и фондов, которые проиллюстрируем на численном примере. Для этого используем модель стационарной популяции предыдущего раздела (кроме, как сказано выше, ежегодного повышения зарплат – другими словами, все заработные платы зависят только от возраста согласно кривой (1) рис. 1). Предположим, что пенсионная схема создается в момент 0 (в начале 2001 года), и предусматривает выплату пенсий всем участникам, достигающим пенсионного возраста не ранее начала 2002 года, в полном объеме. Так как нет ежегодного повышения зарплат, размер всех пенсий одинаков (1070,30 руб. в месяц); годовую пенсию обозначим b. В таблице 1 и на рис. 4 приведены сравнительные результаты расчетов по нескольким методам финансирования. Пенсионные выплаты (вторая колонка) равны взносам pay-as-you-go метода. Их величина растет и становится постоянной по прошествии 41 года, так как с этого момента все члены стационарной популяции, достигшие пенсионного возраста, становятся получателями пенсий. Для двух индивидуальных методов – unit-credit и EAN с постоянными взносами – нормальные цены рассчитаны путем суммирования индивидуальных взносов работающих участников.

Этим методам на момент создания пенсионной схемы соответствует начальная накопленная ответственность, равная сумме индивидуальных нормальных цен работающих участников на момент непосредственно перед началом 2001 года (178 624,3 тыс. руб. для unit-credit метода и 229 340,9 тыс. руб. для EAN с постоянными взносами). Если бы правила схемы были иными, например, была предусмотрена выплата полных или неполных пенсий работникам, оставившим трудовую деятельность в 2001 году или ранее, то APV этих пенсий нужно было бы включить в начальную ответственность. Начальная накопленная ответственность, вообще говоря, может быть погашена не в полном объеме, что фактически означает частичное распределительное финансирование и соответствующее увеличение взносов. В нашей модели предположим, что она погашается (амортизируется) в полном объеме, равными платежами в начале каждого года в течение 15 первых лет работы схемы. Для расчета платежей приравниваем их дисконтированную сумму к начальной ответственности (для unit-credit метода ежегодный платеж равен 17 350,62 тыс. руб., для EAN – 22 276,96 тыс. руб.). Взнос каждого года, таким образом, равен сумме нормальной цены и платежей в счет амортизации начальной ответственности. Процентная ставка, как и выше, 6% годовых; фонд (таблица 2) измеряется на начало года до внесения взносов и выплаты пенсий; расчеты в рублях 2001 года. Схема выходит на стационарный режим через 41 год после ее создания.

Агрегатный метод не формирует начальной нефинансируемой ответственности. APV будущих пенсий

$$V_t = \sum_{x=a+1}^{R-1} bs(x)_{R-x|}\ddot{a}_x + \sum_{\substack{x=R \\ t+R-x\geq 1}}^{100} bs(x)\ddot{a}_x,$$

где второй член представляет собой величину V_0 (APV пенсий участников, достигших пенсионного возраста). Для $t = 0$, полагая $F = 0$, вычисляем c по формуле (14); затем вычисляем фонд на начало второго года согласно (1) и V_1, снова по формуле (14) вычисляем взнос, и т.д. Условие $t + R - x \geq 1$ в последней сумме соответствует началу выплаты пенсий с 2002 года (с $t = 1$). Если бы была предусмотрена выплата других пенсий, их APV нужно было бы включить в эту сумму.

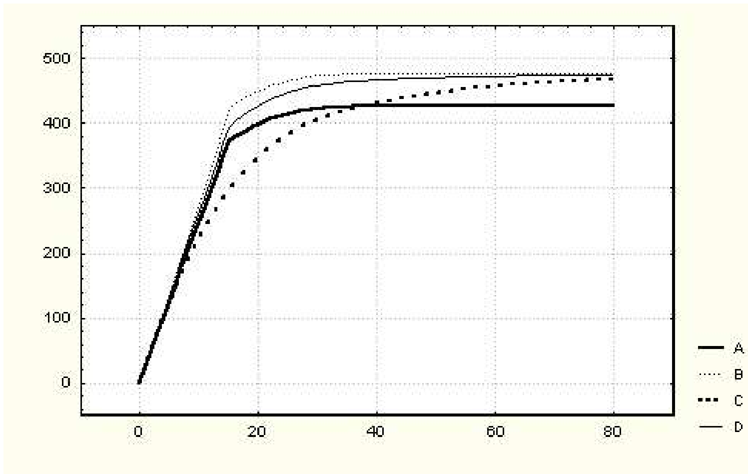

Рис. 4. Формирование пенсионного фонда (млн. руб. 2001 г.) по годам:
A - unit-credit метод;
B - EAN метод с постоянными взносами;
C - агрегатный метод (14);
D - AAN метод.

В случаях A, B и D начальная накопленная ответственность амортизируется равными платежами в течение 15 лет.

Согласно Троубриджу (1952), взносы и объем фонда для агрегатного метода в пределе сходятся к нормальной цене и накопленной ответственности EAN метода. Таблица 2 и рис. 4 показывают, однако, что сходимость довольно медленная. Даже unit-credit метод обеспечивает более высокий темп накоплений на начальном этапе. Фонд превышает фонд unit-credit метода только на 39-й год. Как показывают расчеты, сходимость будет немного более быстрой (в терминах относительного отклонения) при более низкой процентной ставке r. При разумных значениях r (10% или менее) относительное отклонение фонда от фонда EAN метода становится меньше 5% в пределах 60 лет. Момент превышения unit-credit фонда, однако, практически не зависит от величины процентной ставки. В расчетах Траубриджа (1952), где предполагалось значительно меньшее количество участников молодых возрастов (возраст вступления $a = 30$ лет и учитывались досрочные выходы участников из схемы, частые в молодых возрастах), этот период составлял 20 лет, т.е. темп накоплений сравнительно с unit-credit методом и выход на стационарный режим были более быстрыми. Этот эффект нетрудно объяснить с помощью формулы (14); грубо говоря, чем короче период трудовой деятельности и вообще меньше молодых участников, тем меньше „отсрочивается“финансирование ответственности.

Агрегатное финансирование пенсионных планов широко распространено во многих странах. Одно из важных преимуществ этого метода состоит в том, что нет необходимости выделять из общей суммы ответственности ответственность по прошлому стажу; для применения метода требуется оценить только суммарную ответственность по всем пенсиям.

Для нормального метода возраста вхождения (AAN) начальную ответственность по прошлому стажу рассчитываем так же, как начальную ответственность для unit-credit метода. Предусмотрим ее амортизацию равными платежами в течение первых 15 лет. Ответственность, относящаяся к будущему стажу,

$$v = \sum_{a+1}^{R} \frac{R-x+1}{R-a} bs(x)_{R-x|}\ddot{a}_x.$$

Нормальную цену начального года находим, вычисляя c по формуле (17) с $f = 0$ и умножая на N_w. Для следующих лет рассчитываем f как накопленную (с учетом процентного дохода) стоимость разностей нормальных цен и нормальных цен unit-credit метода, и вычисляем c по формуле (17). Фактический взнос за каждый год получается прибавлением к нормальной цене $c \cdot N_w$ платежа в счет амортизации начальной ответственности (17 350,62 тыс. руб.).

Нормальная цена и фонд этого метода также приближаются в пределе к соответствующим характеристикам EAN метода, но гораздо более быстро, чем для агрегатного финансирования (таблица 2 и рис. 4).

Можно заметить, что взнос и агрегатного, и AAN методов представимы в виде

$$C_t = k(PVB_t - F_t - U_t) + A_{UL}(t), \tag{18}$$

где $A_{UL}(t)$ –платеж в погашение начальной нефинансируемой ответственности, U_t – часть начальной нефинансируемой ответственности, оставшаяся непогашенной, k – коэффициент, равный либо N_w/PVN, где

$$PVN = \sum_{x=a+1}^{R} s(x)\ddot{a}_{x:\overline{R-x|}},$$

либо W/PVW.

При агрегатном методе $A_{UL}(t) = 0$ и $U_t = 0$. При AAN методе с амортизацией начальной ответственности в течение n лет

$$A_{UL}(t) = \frac{UL_0}{\ddot{a}_{\overline{n+1|}}} \quad \text{для } t = 0, ..., n. \tag{19}$$

Обозначим PVM_t сумму (с процентами) внесенных платежей в погашение начальной ответственности. Так как $U_t = UL_0 - PVM_t$,

$$PVB_t - F_t - U_t = (PVB_t - UL_0) - (F_t - PVM_t).$$

Так как начальная ответственность UL_0 равна ответственности по прошлому стажу, первое слагаемое равно как раз величине v из (17). Второе слагаемое равно величине f фонда, относящегося к будущему стажу. Действительно, величина PVM представляет ту составляющую фонда F, которая относится к прошлому стажу и погашается амортизационными платежами в счет начальной ответственности. Если же UL_0 не равна ответственности по прошлому стажу, что может быть при росте зарплат и пенсий, к обоим слагаемым в последнем равенстве нужно прибавить разность UL_0 и ответственности по прошлому стажу (читатель может проделать это самостоятельно).

Равенство (18) имеет место также при методах финансирования, называемых в Северной Америке методами *замороженной начальной ответственности* (frozen initial liability). Например, если взнос вычисляется по формуле (18), но начальная ответственность считается не по unit-credit, а по EAN, такой метод иногда называют "frozen-entry-age"(Anderson, 1992).

5 Погашение „отклонений“и нефинансируемой ответственности

В предыдущих разделах были рассмотрены графики внесения взносов, выплат пенсий и изменения накопительного фонда, полученные расчетом на момент $t = 0$. Актуарный метод состоит, однако, не только в получении расчетных кривых, подобных показанным на рис. 4, но и в обеспечении механизма погашения отклонений от этих расчетных значений. В этом смысле актуарные задачи могут рассматриваться как задачи динамического управления. Ниже, в разделе 10, будут рассмотрены некоторые теоретические аспекты таких задач; в разделе 12 приводятся примеры моделирования эффекта актуарной коррекции случайных флуктуаций. Здесь мы рассмотрим практические методы коррекции, без которых представление о методах финансирования пенсий было бы неполным.

Рассмотрим индивидуальные методы финансирования. Точкой пересчета уровня взносов будем считать моменты $1, 2, \ldots$, то есть начало каждого года. В принципе, на практике коррекция взносов может производиться и с иной периодичностью. Это может делаться при актуарном оценивании схемы; например, законодательство Великобритании допускает трехгодичный период оценивания. Представим пенсионный взнос в виде

$$C_t = NC_t + A_t,$$

где A_t – коррекция (adjustment) взноса.

Выше, в разделе 2, было введено понятие нефинансируемой ответственности UL_t, могущей иметь „плановый“и „внеплановый“, т.е. случайный, характер. Метод, традиционно применяемый в Великобритании, состоит в условном „распределении“(spread) всей нефинансируемой ответственности, невзирая на то, является ли она „плановой“или „внеплановой“, на M будущих лет. При этом

$$A_t = \frac{UL_t}{\ddot{a}_{\overline{M|}}} = \frac{AL_t - F_t}{\ddot{a}_{\overline{M|}}} = k(AL_t - F_t), \tag{20}$$

где $k = 1/\ddot{a}_{\overline{M|}}$.

Обратим внимание на подобие этой формулы и формул (14) и (15). Коррекция при распределении нефинансируемой ответственности имеет тот же вид, что взнос при агрегатном методе финансирования: в каждом году погашается определенная доля разности, вследствие чего A_t уменьшается, но теоретически никогда не сводится к нулю. По этой причине некоторые американские авторы, например, Берин (Berin, 1989) называют агрегатный метод финансирования "spread gain"методом.

Заметим, что величина UL_t в случае благоприятных результатов какого-либо года может становиться отрицательной (перефинансирование схемы). В этом случае может производиться коррекция взносов в сторону уменьшения, но не обязательно с помощью правила (20). На практике, по-видимому, чаще используется немедленная коррекция взносов в сторону уменьшения (Dufresne, 1989).

Метод „амортизации“актуарных потерь (actuarial gains/losses amortization), традиционно распространенный в Северной Америке, отличается от описанного тем, что „внеплановая“составляющая нефинансируемой ответственности L_t (4) рассматривается отдельно. Амортизация состоит в ее покрытии m равными ежегодными платежами. Тогда

$$A_t = A_{UL}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{L_{t-j}}{\ddot{a}_{\overline{m|}}}, \tag{21}$$

где $A_{UL}(t)$ – платежи в погашение начальной ответственности, определенные формулой (19).

Что касается групповых методов, рассмотренных в предыдущем разделе, то они уже содержат механизм „распределения“нефинансируемой ответственности. Интересно отметить, что в расчетах раздела 4 по AAN методу фактически используются оба принципа: ответственность по будущему стажу „распределяется“, а начальная ответственность – амортизируется. Обсуждение этих вопросов будет продолжено в разделе 9.

Стоит упомянуть об одной часто используемой характеристике – так называемом *коэффициенте фондирования* (fund ratio), измеряющем уровень финансирования фонда в относительном выражении:

$$fr = \frac{F_t}{AL_t} \cdot 100\% = (1 - \frac{UL_t}{AL_t}) \cdot 100\%.$$

Таким образом, если говорят, что фонд профинансирован на 95%, то это означает, что нефинансируемая ответственность составляет 5% от накопленной ответственности.

6 „Закрытый фонд“

Агрегатный метод использует „запрет“на вступление новых участников, т.е. фактически рассматривается процесс старения и вымирания исходной популяции участников. В актуарной математике для оценки платежеспособности страховых компаний и пенсионных фондов широко применяется подход, известный как метод „закрытого фонда“(closed fund). Фонд или компания условно „закрываются“в момент оценивания, и рассматривается график погашения обязательств за счет реализации активов (так наз. run-off[3]) (Daykin et al., 1994). В нашей стране такой метод оценки платежеспособности пенсионных фондов рекомендован Инспекцией НПФ.

Рассмотрим, например, случай отчисления в пенсионную схему постоянного процента от зарплаты. Как уже говорилось, если $s(t,x)$ – среднее (ожидаемое) число участников пенсионной схемы, находящихся в возрасте x в момент t, причем $s(0,x)$ известны, то в году $t+1$ ожидаемая численность соответствующего поколения будет равна $s(t+1,x+1) = s(t,x)p_x$. Для $x=a$ нужно положить $s(t,a)=0$ для любого $t=0,1,2,...$ Такая процедура приводит, очевидно, к постепенному вымиранию популяции. Норма взноса (как доля фонда зарплаты) $c=c(t)$ рассчитывается из равенства APV взносов и выплат:

$$F_t + c \cdot \sum_{\tau=t}^{\infty} v^{\tau} W_{\tau} = \sum_{\tau=t}^{\infty} v^{\tau} B_{\tau}, \tag{22}$$

что приводит к (15). Суммирование в (22) ведется фактически до момента ожидаемого вымирания популяции, который определяется конечным возрастом используемой таблицы смертности.

Рис. 7 в разделе 12 иллюстрирует метод „закрытого фонда“. Вначале происходит накопление средств, затем, по мере старения популяции, „сбегание“до нуля.

7 Схема с определенными взносами

Уравнение (22) может также применяться для расчета уровня пенсий в *схеме с определенными взносами* (defined contribution, DC). В этом случае левая часть уравнения считается фиксированной, а определяется уровень пенсий, входящий в правую часть. Например, рассмотрим пенсионную схему с определенными взносами и индексацией пенсий по инфляции. Если $b=b(0)$ – начальный уровень пенсии, то $b(t)=b(1+i)^t$ (i – годовая норма инфляции, предполагаемая актуарием). Подставляя это в (22), считая c заданным, находим b. Эта модель очевидным образом обобщается на случай, когда пенсии неоднородны по возрастам, $b=b(t,x)$. Второй график на рис. 7 в разделе 12 иллюстрирует поведение фонда при таком пересчете пенсий.

[3] Английское слово run-off означает „сбегание“(например, воды).

В рассмотренном случае финансирование пенсионной схемы с определенными взносами осуществляется на „групповой“основе. Тот же принцип актуарной эквивалентности взносов и обязательств применяется в схемах с индивидуальным финансированием, но, естественно, уже применительно к каждому индивидуальному участнику. В этом случае остаток на индивидуальном счету участника раскладывается в виде аннуитета на годы получения пенсии.

Простейший пример такой схемы – схема с индивидуальными счетами, на которых производится накопление средств участников. При достижении пенсионного возраста сумма, накопленная на таком счету, может выдаваться в виде единовременного пособия (lump sum) либо на нее может покупаться аннуитет (полис пожизненного пенсионного страхования) у третьей страховой компании. В схемах с индивидуальными счетами средства, как правило, полностью или частично вносятся самими участниками, являясь их собственностью (в частности, они могут наследоваться в случае смерти участника до достижения пенсионного возраста). При традиционной „жесткой“конструкции таких схем актуарные расчеты просты и потребность в них фактически сведена к минимуму. В другом случае средства вносятся работодателем и не наследуются. Тогда баланс фонда (суммы индивидуальных счетов) возрастной когорты участников возраста $x < R$ выражается уравнением вида

$$F_x + P(x+1)v^{x+1-a}s(x+1) + ... + P(R)v^{R-a}s(R) = s(a)(aA)(a),$$

где F_x – сумма уже накопленных средств на индивидуальных счетах. Если при достижении пенсионного возраста накопленная сумма не выплачивается единовременно и не конвертируется в аннуитет, то начальная пенсия рассчитывается из этого же соотношения при $x = R$, то есть приравниванием правой части (APV пенсии) к накопленному фонду. В дальнейшем актуарий может рассчитывать пенсии исходя из аналогичного соотношения баланса, приравнивая оставшийся фонд к APV пенсии оставшихся в живых членов данного возраста.

Во всех этих случаях актуарные расчеты проще, чем в DB схемах, и сводятся к вычислению APV тех или иных аннуитетов. Простота, с одной стороны, и перенесение риска (в частности, инвестиционного риска) со схемы на ее участников, с другой, определяют рост популярности таких схем в области дополнительного пенсионного обеспечения в экономически развитых странах, отмечаемый еще с 70-х годов. Случайные колебания инвестиционной доходности, смертности и др. приводят к колебаниям уровня пенсий. Многие DC схемы, однако, все же содержат какие-либо механизмы гарантирования пенсий.

Разнообразие существующих в настоящее время пенсионных схем с определенными взносами очень велико. Многие из них предоставляют своим участникам различные опции. В частности, как развитие схемы с определенными взносами можно рассматривать пенсионные планы „денежных счетов“(cash balance), получившие распространение в США. Схемы этого типа начали появляться вследствие все большей конкуренции, составляемой пенсионным фондам другими инвестиционными альтернативами, в частности, паевыми фондами. В таких схемах участникам предоставляется опция выбора структуры инвестирования их средств, при этом пенсионная схема гарантирует некую минимальную (обычно невысокую) ставку доходности. Методы расчетов в этих и других типах пенсионных схем, предоставляющих участникам различные инвестиционные опции, тесно смыкаются с методами финансовой математики (Bolton Offut Donovan, 2000). Описание использования „финансовых“методов для оценивания пенсионных пособий с опциями можно найти в статье Шерриса (Sherris, 1995).

8 Оценивание активов

Все проводившиеся выше рассуждения относились к „теоретическому“объему пенсионных накоплений $F = F_t$. На практике, однако, определение, денежного эквивалента имеющихся активов представляет собой специфическую актуарную проблему, возникающую при оценивании пенсионных фондов, необходимости определения платежеспособности, расчетах взносов и пенсий и т.д. Проблема связана с колебаниями цен активов, могущими иметь значительный размах и серьезное влияние на актуарные оценки. Ниже дается краткий обзор практических методов оценивания активов и возникающих при этом задач.

Оценка активов по рыночной стоимости (Fair Market Value, FMV) означает приписывание активам той цены, которая может быть выручена в случае их немедленной продажи на рынке. При этом обычно не учитывают возможные изменения цен вследствие продажи значительных активов, так как реальная их продажа не подразумевается. Этот метод является наиболее простым, он прозрачен для финансовых менеджеров и актуариев и объективен в том смысле, что два применяющих его актуария не могут разойтись в оценках. С другой стороны, краткосрочные колебания рыночных цен активов могут приводить к определенной нестабильности в пенсионном финансировании, в частности, к резким перепадам уровня требуемых взносов/расчетных пенсий (в зависимости от типа схемы). Чтобы избежать краткосрочных искажений и создать более стабильную картину стоимости активов, лучше отражающую их ценность в долгосрочной перспективе, на практике применяют другие методы оценки. Однако, как отмечает Андерсон (1992), рыночная стоимость всегда остается ориентиром, который игнорировать нельзя. Оценочная стоимость должна так или иначе периодически „пересекаться“с рыночной стоимостью активов.

Рыночная стоимость может тем или иным образом *сглаживаться* для устранения краткосрочных колебаний и получения более верной оценки. Возникающая при этом проблема состоит в том, что оценка должна производиться на фоне входящих и исходящих денежных потоков, которые необходимо учитывать при сглаживании. Сглаживанию должно подвергаться значение P_t стоимости единицы активов. Рассмотрим сначала ситуацию в отсутствие инфляции. Пусть период сглаживания составляет n лет, текущий момент $t = 0$. В простейшем случае в качестве актуарной стоимости единицы активов можно взять число

$$\overline{P}_0 = \frac{1}{n}(P_{-(n-1)} + ... + P_0). \tag{23}$$

Здесь можно положить $P_{-(n-1)} = 1$, т.е. в качестве единицы активов брать условный портфель активов, стоивший 1 ден.ед. за $n - 1$ лет до текущей даты. По данным финансовой отчетности за последние n лет представим рыночную стоимость активов M_t в виде

$$M_{t+1} = M_t + K_{t+1} + D_{t+1},$$

где K_{t+1} – чистый денежный поток за время $[t, t+1]$ (поступления взносов, выплаты пенсий, инвестиционный доход в денежной форме, административные расходы и пр.); D_{t+1} – чистое приращение рыночной стоимости активов, имевшихся у фонда *на начало года*, за тот же период. Как легко видеть (Anderson, 1992),

$$\frac{P_{t+1}}{P_t} = 1 + \frac{D_{t+1}}{M_t}.$$

Это соотношение позволяет рассчитывать P рекуррентно.

Альтернативой скользящему среднему (23) является экспоненциальное сглаживание

$$\overline{P}_0 = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} P_{-k} \cdot \lambda^k,$$

где λ – положительное число, меньшее 1.

Теперь перейдем к учету инфляции. Так как в этом случае P_{t+1} измеряется в денежных единицах, стоимость которых изменилась в $(1+i_t)$ раз по сравнению с моментом t, где i_t – нормаинфляции за период $[t, t+1]$, формула для изменения реальной (в деньгах момента t) стоимости единицы активов будет выглядеть как

$$\frac{P_{t+1}}{P_t} = \frac{1 + \frac{D_{t+1}}{M_t}}{1 + i_t}.$$

Для целей сглаживания все цены P_t должны быть пересчитаны в цены одного момента времени, например, $t = 0$.

Согласно (Society of Actuaries Committee on Retirement Systems Research, 1998)[4], в США и Канаде общепринятым периодом сглаживания является 5 лет.

Еще одним методом оценки активов является метод стоимости приобретения или исторической стоимости (cost value, historic value), при котором оценивание основано на цене, по которой актив был приобретен. Этот метод называют также методом бухгалтерской стоимости (book value). Он наиболее прост, но далеко не всегда может отражать реальную ситуацию. Используются также комбинации описанных методов; например, при сглаживании стоимости может учитываться стоимость приобретения, т.е. браться среднее взвешенное рыночной стоимости (возможно, тоже сглаженной) и стоимости приобретения. В некоторых странах законодательство предписывает оценивать активы по так называемой пониженной исторической стоимости, то есть минимальной стоимости актива с момента его приобретения (Daykin et al., 1994). Последний метод является, очевидно, самым консервативным.

Еще один метод оценивания – это так называемый write-up метод, при котором актуарная стоимость единицы активов на конец прошлого года умножается на некоторую процентную ставку, признаваемую „разумной“в долгосрочной перспективе. Эта ставка может вычисляться или же

[4] Далее (CRSR,1998).

определяться как-то иначе (например, доходность бумаг Казначейства США + 3%). Чтобы актуарное значение стоимости активов не слишком уклонялось от рыночной стоимости, обычно либо берут взвешенное среднее с рыночной стоимостью, либо явно определяют „коридор“вокруг значения рыночной стоимости, из которого не может выходить оценочное значение. Согласно (CRSR, 1998), в США и Канаде распространена практика использования этого метода с „коридором“80 – 120% рыночной стоимости.

Как показало то же исследование, подавляющее большинство пенсионных схем в Северной Америке, насчитывающих более 100 участников, использует либо метод рыночной стоимости (более 48% схем), либо сглаженной рыночной стоимости (более 36%), однако в последнюю категорию были включены также write-up метод и метод сглаживания с учетом стоимости приобретения.

Овадалли и Хэберман (Owadally and Haberman, 2000) отмечают, что в Великобритании традиционно был популярен подход, состоящий в оценке дисконтированных денежных потоков от инвестиций. Этот подход имеет свои преимущества, прежде всего в отношении вложений в надежные облигации, когда соответствующие денежные потоки могут быть определены весьма точно. Действительно, во многих пенсионных схемах реализация сколько-нибудь значительной части активов не предполагается; активы приобретаются ради обеспечиваемых ими денежных потоков. На практике для дисконтирования обычно используется то же значение процентной ставки, что и для расчета APV пенсий и взносов. В Северной Америке этот метод применяется мало (CRSR, 1998).

Возможность применения различных методов оценивания активов в российских условиях и возникающие при этом проблемы заслуживают специального исследования. В общем можно сказать, что метод оценки активов должен рассматриваться во взаимосвязи с общей методикой актуарных расчетов, и прежде всего с методом оценки обязательств, т.е. будущих пенсионных выплат. Метод оценивания может зависеть от его целей; например, при оценивании платежеспособности естествен сдвиг в сторону более консервативных оценок, а при расчете взносов более важна реалистичность „в долгосрочном среднем“. Кроме того, как отмечают, например, Овадали и Хэберман (2000), важна объективность оценок в смысле их понятности и приемлемости для других актуариев.

9 Модели со случайной инвестиционной доходностью

Традиционные актуарные модели, описанные выше, строятся на детерминистических принципах, в частности, используют постоянную оценочную ставку процентной доходности r. Модели пенсионного финансирования, включающие вероятностные элементы, начали развиваться сравнительно недавно. В этом разделе описывается модель, предложенная Дюфренем (Dufresne, 1986, 1988, 1989), развивавшаяся и обобщавшаяся в работах Хэбермана (1994,1997), Хэбермана и Вонга (Haberman and Wong, 1997), Овадалли и Хэбермана (1999), Бедар и Дюфреня (Bedard and Dufresne, 2001) и др. Модель описывает случайные колебания уровня фонда и взносов в схеме с определенными выплатами, порожденные обним источником неопределенности – случайными процентными ставками r_t. Другим очевидным источником неопределенности являются колебания численности популяции участников пенсионной схемы, в частности, за счет смертности. Сравнительное влияние этих рисков показано на расчетном примере в следующем разделе. В целом, по-видимому, можно сказать, что для большинства пенсионных схем, кроме небольших по числу участников, инвестиционный риск должен играть более важную роль.

Рассмотрим модель пенсионной схемы с определенными выплатами со стационарной популяцией участников, во всем аналогичную введенной выше, за исключением следующего предположения: *реальные ставки инвестиционной доходности r_t для периода $[t-1, t]$ образуют последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со средним $\mathbf{E}r_t = \tilde{r}$.* Пусть, как и прежде, r – ставка, используемая для актуарного оценивания (valuation rate).

Рассмотрим индивидуальные методы финансирования. Будем предполагать, что пенсии не индексируются и что все участники, достигшие пенсионного возраста, получают пенсию в полном объеме. Тогда суммарные пенсионные выплаты представляют постоянную величину B. Накопленная актуарная ответственность AL и нормальная цена NC находятся так, как описано выше. Они постоянны, так как популяция участников стационарна, актуарная ставка r постоянна и нет индексации пенсий. Динамика фонда описывается уравнением (1), куда вместо r нужно подставить реальное значение доходности r_t:

$$F_{t+1} = (1 + r_{t+1})(F_t + C_t - B). \qquad (24)$$

Здесь C_t рассчитывается актуарными методами, описанными выше, как нормальная цена NC плюс „коррекция"взноса A_t. Последняя может вычисляться согласно правилу „распределения"(20) или „амортизации"(21). Величины F_t и C_t теперь случайны, и естественно поставить вопрос об их вероятностном поведении. Однако самое большее, что удается сделать даже в простейшем случае независимых одинаково распределенных возмущений, это получить результаты относительно первых двух моментов этих величин.

Для иллюстрации основных идей остановимся более подробно на результатах, полученных Дюфренем (1989) для случая „амортизации". Итак, пусть действует правило коррекции отклонений (21). Выразим UL_t через L_t. Согласно (2), (3), (4), (24),

$$UL_t = AL - F_t = (1+r)(AL+NC-B) - (1+r_t)(F_{t-1}+NC+A_{t-1}-B) =$$

$$= (1+r)(UL_{t-1} - A_{t-1}) + (r_t - r)(UL_t - A_{t-1} - (1+r)^{-1}AL). \qquad (25)$$

Отсюда после преобразований получаем

$$UL_t - (1+r)UL_{t-1} = L_t - (1+r)\sum_{s=t-m}^{t-1} L_s/\ddot{a}_{\overline{m|}}. \qquad (26)$$

Дальнейшее основано на решении этого разностного уравнения. Общее решение представимо в виде суммы какого-либо частного решения и решения однородного уравнения

$$UL_t - (1+r)UL_{t-1} = 0.$$

Решение однородного уравнения есть, как легко видеть, $UL_0(1+r)^t$. Частное решение

$$UL_t^p = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k L_{t-k},$$

где

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = \ddot{a}_{\overline{m-1|}}/\ddot{a}_{\overline{m|}}, \quad ..., \quad \lambda_k = 0 \text{ для } \; k = m, m+1, m+2, ...$$

Таким образом, общее решение уравнения (26) есть

$$UL_t = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k L_{t-k} + UL_0(1+r)^t.$$

Для простоты положим $L_0 = UL_0$, после чего будем считать $UL_0 = 0$, т.е. включим начальную нефинансируемую ответственность в актуарный убыток L_0. Тогда ее амортизация m равными платежами включается во второе слагаемое в (21), первое же слагаемое $A_{UL} = 0$.

Из (1) и (2) получим

$$UL_t^A = (1+r)(UL_{t-1} + NC - C_{t-1}).$$

Подставляя это вместе с (25) в определение актуарного убытка (4), имеем для $t \geq 1$

$$L_t = (r_t - r)\left[UL_{t-1} - A_{t-1} - (1+r)^{-1}AL\right]. \qquad (27)$$

Подставляя сюда полученное выше решение для UL и выражение для A из (21), где $UL_0 = 0,\ \ A_{UL}(t) = 0$, окончательно получаем разностное уравнение для L_t:

$$L_t = (r_t - r)\left[\sum_{k=1}^{m-1} \beta_k L_{t-k} - (1+r)^{-1}AL\right], \qquad (28)$$

где $\beta_k = \lambda_{k-1} - 1/\ddot{a}_{\overline{m|}},\ \ \beta_m = 0$.

Беря здесь математические ожидания, приходим к аналогичному линейному разностному уравнению для $\mathbf{E}L_t$. Дюфрень (1989) изучал предельное поведение $\mathbf{E}L_t$ при $t \to +\infty$, опираясь на соответствующие результаты теории разностных уравнений для доказательства существования предельного значения. Им было показано, что предельное значение существует при выполнении условия

$$|\tilde{r} - r| \sum_k \beta_k < 1. \qquad (29)$$

Беря в (28) математические ожидания и переходя к пределу при $t \to +\infty$, получаем

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{E}L_t = \mathbf{E}L_\infty = \frac{-(\tilde{r} - r)(1+r)^{-1}AL}{1 - (\tilde{r} - r)\sum \beta_k}.$$

Так как

$$F_t = AL - UL_t = AL - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k L_{t-k},$$

$$C_t = NC + A_t = NC + \sum_{k=0}^{m-1} L_{t-k}/\ddot{a}_{\overline{m|}},$$

нетрудно видеть, что условие (29) достаточно для существования пределов F_t и C_t, причем

$$\mathbf{E}F_\infty = AL - \mathbf{E}L_\infty \sum \lambda_k,$$
$$\mathbf{E}C_\infty = NC + \mathbf{E}L_\infty m/\ddot{a}_{\overline{m|}}. \tag{30}$$

Результаты особенно упрощаются, если положить $\tilde{r} = r$, то есть считать, что оценочная ставка, которой пользуется актуарий, представляет собой в среднем верную оценку реальной процентной ставки. Тогда (Owadally and Haberman, 1999, p. 111)

$$\mathbf{E}L_t = 0,$$
$$\mathbf{E}F_t = AL - UL_0 \frac{\ddot{a}_{\overline{m-t|}}}{\ddot{a}_{\overline{m|}}} I(t<m),$$
$$\mathbf{E}C_t = NC + \frac{UL_0}{\ddot{a}_{\overline{m|}}} I(t<m), \tag{31}$$

где $I(\cdot)$ – индикаторная функция. Вторые слагаемые в выражениях для F_t и C_t представляют собой, соответственно, непокрытую часть начальной нефинансируемо ответственности UL_0 и платежи в счет ее амортизации. Предельные значения математических ожиданий фонда и взноса равны AL и NC соответственно. Этот результат говорит о том, что ориентация актуария на в среднем верную оценку доходности приводит к в среднем „правильным“значениям взносов и фонда.

Для определения вторых моментов, по-прежнему считая $\tilde{r} = r$, рассмотрим ковариации

$$\mathbf{E}L_t L_s = \mathbf{E}(r_t - r)\left[\sum_{k=1}^{m-1} (\beta_k L_{t-k} - (1+r)^{-1} AL)\right] L_s = 0,$$

так как r_t и L_s независимы при $s < t$. Отсюда дисперсии

$$Var L_t = \mathbf{E}L_t^2 = Var(r_t)\left[\sum_{k=1}^{m-1} \beta_k^2 Var(L_{t-k}) + (1+r)^{-2} AL^2\right].$$

Необходимым и достаточным условием сходимости последовательности дисперсий, определенной этим разностным уравнением, является условие

$$q = Var(r_t) \sum_k \beta_k^2 < 1.$$

Если оно выполнено, то

$$\lim_{t\to+\infty} Var(L_t) = V = Var(r_t)\frac{AL^2}{(1+r)^2(1-q)},$$

$$\lim_{t\to+\infty} Var(F_t) = VarF_\infty = V\sum \lambda_k^2,$$

$$\lim_{t\to+\infty} Var(C_t) = VarC_\infty = V\sum m/(\ddot{a}_{\overline{m|}})^2. \tag{32}$$

Для случая „распределения“нефинансируемой ответственности (20) применялись аналогичные методы, связанные с анализом разностных уравнений. Математические ожидания (Dufresne, 1988) в этом случае

$$\mathbf{E}F_t = AL - UL_0[(1+r)(1+k)]^t,$$

$$\mathbf{E}C_t = NC + UL_0[(1+r)(1+k)]^t, \tag{33}$$

$k = 1/\ddot{a}_{\overline{M|}}$ (ср. (31)).

В той же работе вычислены предельные дисперсии, аналогичные (32) (см. также (35) ниже). Точные выражения для дисперсий можно найти в статье (Owadally and Haberman, 1999, p. 108).

Интересно сравнить два метода коррекции отклонений – „распределение“и „амортизацию“– с точки зрения их „предельного“поведения. При обоих методах

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{E}F_t = AL, \ \lim_{t\to+\infty} \mathbf{E}C_t = NC. \tag{34}$$

Однако с точки зрения минимизации предельных дисперсий метод „распределения“оказывается более эффективным. Обозначим F^s и C^s фонд и взнос, рассчитанные согласно методу „распределения“, F^a и C^a – фонд и взнос, рассчитанные согласно методу „амортизации“. Справедливо следующее утверждение (Owadally and Haberman, 1999):

если выбрать $m > 1$ и $M > 1$ так, что $VarF^a_\infty = F^s_\infty$, то $VarC^a_\infty > VarC^s_\infty$.

„В оправдание“метода „амортизации“можно сказать, что зато сходимость в (34) для этого метода более быстрая, так как по окончании амортизационного периода (типичная его длительность в Северной Америке 10 – 15 лет) фонд и взнос достигают в среднем своих целевых значений. „Распределение“, с другой стороны, обеспечивает более плавное управление пенсионным процессом, изменения взноса и фонда носят более сглаженный характер.

Что касается групповых методов, описываемых равенством (18), то они, как было видно выше, фактически используют „распределение“нефинансируемой ответственности. После периода амортизации начальной нефинансируемой ответственности поведение F_t и C_t математически аналогично их поведению при индивидуальных методах с „распределением“. Чтобы убедиться в этом, подставим в основное уравнение (24) выражение для C_t ($t > n$, т.е. после погашения начальной ответственности) при индивидуальных методах с „распределением“:

$$C_t = NC + k(AL - F_t),$$

(см. (20)), что даст

$$F_{t+1} = (1 + r_t)(F_t + NC + k \cdot AL - kF_t - B) = (1 + r_t)(F_t(1 - k) + G),$$

где $G = k \cdot AL + NC - B$. С другой стороны, подставляя в то же уравнение C_t из (18), т.е. $C_t = k'(AL - F_t)$ (так как $U_t = 0$ для $t > n$), получаем

$$F_{t+1} = (1 + r_t)(F_t(1 - k') + G'),$$

где $G' = k' \cdot PVB - B$. Таким образом, с точностью до коэффициентов, динамика фонда подчиняется одному и тому же закону. Из последнего соотношения легко получить, беря математические ожидания (величины r_{t+1} и F_t независимы) и переходя к пределу, выражение для предельного математического ожидания фонда. Дисперсия находится несколько сложнее. Дюфрень (1986,1988) приводит следующие выражения (здесь по-прежнему $\mathbf{E}r_t = r$):

$$\mathbf{E}F_\infty = \frac{G'(1 + r)}{1 - (1 - k')(1 + r)}, VarF_\infty = \frac{b[\mathbf{E}F_\infty]^2}{1 - a}, \tag{35}$$

где $b = Var(r_t)(1 + r)^{-2}$, $a = [(1 - k')(1 + r)]^2(1 + b)$, причем формула для дисперсии верна, если $a < 1$, иначе дисперсия бесконечна. Читатель может самостотельно проверить, что подстановка в первое уравнение (35) G вместо G' даст, с учетом (2), $\mathbf{E}F_\infty = AL$, что согласуется с (33). Аналогично, подставляя G' и k' вместо G и k, из второго уравнения (35) можно получить выражение для предельной дисперсии в случае индивидуального финансирования с „распределением“нефинансируемой ответственности.

Из (35) легко найти моменты C_t, так как для $t > n$

$$C_t = k'(PVB - F_t).$$

Описанные модель и результаты развивались и обобщались рядом авторов. Хэберман (1997) изучал „риск нормы взносов“в терминах первых двух моментов величины

$$G(\infty) = \sum_{s=0}^{+\infty} v^s C_s,$$

где, как и выше, $v = (1 + r)^{-1}$.

В нескольких работах делались попытки избавиться от слишком упрощенного представления о независимости доходностей. В частности, использовались процесс авторегрессии первого порядка (AR(1) процесс) для r_t:

$$r_t = r + \gamma(r_{t-1} - r) + \sigma\varepsilon_t, \tag{36}$$

где ε_t – независимые стандартно нормальные случайные величины, $|\gamma| < 1$, а также AR(2) процесс (Haberman, 1994); процесс скользящего среднего первого порядка (MA(1) процесс)

$$r_t = r + \sigma\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

(Bedard and Dufresne, 2001); такой же процесс для силы роста $\delta(t) = ln(1 + r_t)$, а также ARMA(1,1) процесс для $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \bar{\delta} + \gamma(\delta(t-1) - \bar{\delta}) + \sigma\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

(Haberman and Wong, 1997).

Усилия авторов перечисленных работ направлялись на получение выражений для первых двух моментов F_t и C_t и изучение их предельного поведения. Оказалось, что отказ от независимости ведет к значительным аналитическим трудностям. Получающиеся результаты громоздки и трудны для анализа. В некоторых работах использовались численные расчеты и приближенные формулы (например, (Haberman, 1994)). Рассматривались также задачи нахождения оптимальных периодов „распределения“M и „амортизации“m.

10 Оптимальное финансирование пенсий как задача динамического управления

Как отмечалось выше, актуарные методы финансирования с их механизмами „коррекции отклонений“во многом аналогичны *системам динамического управления* (dynamic control). В предыдущем параграфе исследовалась вариабельность C_t и F_t, и используемые на практике актуарные методы сравнивались с точки зрения эффективности коррекции отклонений, т.е. „настройки“на заданную „траекторию“эволюции фонда.

С другой стороны, можно рассматривать вопрос об *оптимальных* способах такой коррекции. Тогда задача превращается в задачу оптимального динамического управления. Параметром, которым может управлять актуарий, в схеме с определенными выплатами является взнос C_t. Прежде всего, возникает вопрос о критериях „качества“управления. Бенджамин (Benjamin, 1989) в детерминистической модели с различными видами колебаний, задаваемых „сценариями“процентной доходности, рассматривал управления, оптимальные с точки зрения минимизации функции потерь

$$J = \sum (C_{t+1} - C_t)^2,$$

то есть „плавности“траектории взносов. Естественно, допустимыми управлениями C_t были не любые (иначе достаточно было бы взять постоянное $C_t = C$), а отвечающие некоему правилу полного финансирования пенсий. О'Брайеном (O'Brien, 1987) была рассмотрена задача динамического управления в непрерывном времени на конечном временном интервале $[s, T]$. Оптимальность управления определялась минимимизацией критерия

$$J_{s,T} = \mathbf{E} \int_s^T e^{-\delta t} [^2_t + \beta(\eta AL_t + F_t)^2] dt,$$

где c_t – интенсивность взноса (управляемый параметр), AL_t и F_t – накопленная ответственность и фонд, рассматриваемые в непрерывном времени, но подчиняющиеся уравнениям, аналогичным приведенным выше для дискретного времени, η – целевой уровень коэффициента фондирования (fund ratio), то есть отношения F/AL. Хэберман и Сунг (Haberman and Sung, 1994) решали задачу в модели с дискретным временем, используя квадратичную функцию потерь

$$J_{s,T} = \mathbf{E}\left(\sum_{t=s}^{T-1} v^t \left[(C_t - CT_t)^2 + v\beta(F_{t+1} - FT_{t+1})^2\right]\right), \qquad (37)$$

где CT и FT – целевые уровни, соответственно, взноса и фонда, β – неотрицательная постоянная.

Булье и др. (Boulier et al., 1996) в модели с непрерывным временем ввели функционал потерь общего вида

$$J = \mathbf{E}\left[\int_t^\infty e^{-\beta s} L(s, c_s, F_s) ds\right],$$

где c_s – интенсивность взносов, являющаяся некоторой функцией от времени s и фонда F_s. Кэйрнс (Cairns, 2000) рассматривает этот критерий с квадратичной функцией

$$L(s, c, F) = (c - \tilde{c})^2 + 2\rho(c - \tilde{c})(F - \tilde{F}) + (k + \rho^2)(F - \tilde{F})^2,$$

где $\tilde{c}$, $\tilde{F}$ – целевые значения взноса и фонда соответственно, ρ и k – константы. Он же рассматривает некоторые степенные и экспоненциальные функции. Главным отличием этих работ от предшествовавших им является то, что оптимизация производится не только по взносам, но и по составу инвестиционного портфеля. Для этого вводится модель с одним безрисковым (детерминированная доходность) и n рисковыми активами. Доходность рисковых активов моделируется n-мерным коррелированным броуновским движением. Динамика фонда задается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dF_t = F_t d\delta(t, F_t) + c(t, F_t)dt - Bdt - \sigma dZ_t,$$

где $\delta(t, F_t)$ – доходность с непрерывным начислением на активы фонда, $c(t, F_t)$ – мгновенная норма пенсионных взносов, B – средний уровень пенсионных выплат, σ – волатильность пенсионных выплат. Управление заключается в выборе долей фонда, инвестируемых в различные активы (в соответствии с которыми вычисляется δ), и величины c.

Среди перечисленных работ модель Хэбермана и Сунга (1994) ближе других к дискретной модели пенсионной схемы, рассматриваемой в предыдущих разделах. Поэтому для иллюстрации подхода стохастического динамического управления приведем один из результатов этой статьи. Итак, рассмотрим модель пенсионной схемы, описываемую уравнением (24), где, как и в разделе 9, r_t представляют собой независимые одинаково распределенные случайные величины. F_0 и r_0 будем считать заданными. Задача заключается в определении функции C_t, оптимальной с точки зрения минимизации критерия (37). Решение задачи основано на построении функции Беллмана и решении уравнения Беллмана. Приведем здесь только ответ для случая $CT_t = NC$, $FT_t = AL$. Оптимальный взнос определяется в этом случае в виде

$$C_t^* = \frac{2v^t NC + 2(v^{t+1}\beta + a_1(t+1))k_1(B - F_t) + (2v^{t+1}\beta AL - a_2(t+1))k_2}{2v^t + 2(v^{t+1}\beta + a_1(t+1))k_1}, \tag{38}$$

где $a_1(t)$ и $a_2(t)$ определяются как решения рекурсивных уравнений:

$$a_1(t) = \frac{v^t[v^{t+1}\beta + a_1(t+1)]k_1}{v^t + [v^{t+1}\beta + a_1(t+1)]k_1};$$

$$a_2(t) = \frac{v^t[2(v^{t+1}\beta + a_1(t+1))k_1(NC - B) + (a_2(t+1) - 2v^{t+1}\beta AL)k_2}{v^t + (v^{t+1}\beta + a_1(t+1))k_1},$$

$a_1(T) = a_2(T) = 0$, $k_1 = (1+\tilde{r})^2 + Var(r_t)$, $k_2 = 1 + \tilde{r}$ (напомним, что $\tilde{r} = \mathbf{E}r_t$.

Оптимальный взнос (38) есть *линейная функция* от величины фонда F_t. Аналогичный результат в модели с непрерывным временем был получен Булье и др. (1996). Такие авторы, как О'Брайен (1987), Кейрнс (2000), вводили линейность как исходное предположение, ограничивая поиск C_t линейными функциями от величины фонда.

11 Динамический финансовый анализ пенсионных систем

Попытки введения вероятностных элементов в модели пенсионного финансирования, как видно из предыдущих двух разделов, сопряжены со значительными аналитическими трудностями. Это заставляет думать, что сколько-нибудь реалистичная пенсионная модель вряд ли может исследоваться одними аналитическими методами. Компьютерное моделирование, с другой стороны, открывает здесь многообещающие перспективы, позволяя исследовать модели практически любой сложности (хотя, конечно, только численно). В этом разделе описываются некоторые общие подходы к такому моделированию; в следующем разделе будет приведено несколько примеров.

В последние десятилетия получают все большее распространение практически-ориентированные модели и методы, связанные с общим понятием динамического финансового анализа (dynamic financial analysis, DFA). В отличие от традиционного финансового анализа, этот подход рассматривает не только современное финансовое состояние, например, пенсионной схемы, но и возможные будущие его изменения. Это предполагает построение и компьютерную реализацию математических моделей денежных потоков схемы, которые затем могут „испытываться на прочность“путем „проигрывания“различных сценариев, как детерминированных, так и генерируемых стохастически. Задавая на входе различные импульсы (возмущения), можно получать на выходе реакции моделируемой экономической системы и оценивать, таким образом, закономерности ее поведения. При наличи в системе „самонастройки“или „обратных связей“эти реакции могут быть нетривиальны. Особенность методов динамического финансового анализа по сравнению с традиционными методами математического моделирования экономических систем состоит в систематическом применении стохастического моделирования и метода сценариев для исследования стратегий управления, рисков, внутренних и обратных связей, присущих тем или иным экономическим системам (корпорациям, банкам, фондам и т.п.). Этот метод предполагает не прогнозирование будущего, а скорее формирование более ясного понимания существующих альтернатив и сопутствующих им рисков. Основной подход – так называемый анализ чувствительности к возмущениям (stress testing) или „что – если“анализ[5].

Актуарное применение методов DFA было начато работами финских и британских актуарных рабочих групп по платежеспособности и подробно описано в книге (Daykin, Pentikainen, and Pesonen, 1994). Первичной мотивацией этих исследований стало понимание недостаточности данных обычной финансовой отчетности для оценивания платежеспособности; такие оценки были признаны слишком статическими и слишком ре-

[5]Разнообразные публикации по динамическому финансовому анализу можно найти на специальном сайте американского Актуарного общества по рисковому страхованию (Casualty Actuarial Society) www.casact.org/research/dfa/.

троспективными, чтобы верно измерять будущую платежеспособность. Работы финских и британских исследователей перенесли ударение в оценивании платежеспособности на динамический подход, где внимание фокусируется на денежных потоках. В настоящее время тестирование денежных потоков (cash flow testing) при помощи различных сценариев уже стало частью практических стандартов актуарного оценивания компаний страхования жизни (осуществляющих, в том числе, пенсионное страхование), официально предписанных в Канаде и США.

Первые работы по исследованию чувствительности пенсионных схем к возмущениям принадлежат Бенджамину (Benjamin, 1989), который изучал пенсионные схемы как управляемые системы, анализируя реакции на различные импульсы („пики“, „скачки“, „колебания“и т.д.), а также Лоадсу (Loads, 1992), который использовал синусоидальные входные сигналы. Мейнард (Maynard, 1992) моделировал фонд с определенными выплатами в случае индексации пенсий по инфляции. Дэйкин и др. (1994, гл. 16) подробно описывают построение модели для имитационного моделирования пенсионной схемы. Хорасани (Khorasanee, 1997) рассматривал реакции пенсионной схемы с определенными взносами на некоторые сценарно задаваемые возмущения в детерминированном случае.

12 Численные иллюстрации: анализ чувствительности

Метод анализа чувствительности модели денежных потоков пенсионной схемы к возмущениям можно применить для исследования задач, описанных выше. Здесь мы приведем только несколько примеров численного моделирования пенсионных систем, иллюстрирующих изложение предыдущих разделов. Мы промоделируем:

(а) стохастический процентный доход, как в моделях раздела 9;

(б) актуарное управление нормой взноса в DB схеме, осуществляемое традиционными методами разделов 3 – 7, но уже на фоне случайных флуктуаций параметров (то есть в ситуации, приближающей реальную).

Приведенные ниже примеры получены с помощью компьютерной программы *„Моделирование денежных потоков и рисков“* (CFRM), написанной автором. Упрощенная (учебная) версия этой программы[6] находится в свободном доступе на сайте Высшей школы экономики, www.hse.ru/persona/sholom.htm; там же можно найти и полное описание использованной модели. Создавая эту программу, я пытался осуществить принципы динамического финансового анализа, описанные в предыдущем разделе, и сделать их применение по возможности наглядным. Прежде всего это относится к анализу чувствительности: программа позволяет легко накладывать сценарные и стохастические возмущения на расчетные денежные потоки схемы, получать соответствующие пучки траекторий, выборки для конкретных моментов времени (так называемые „сечения“пучков траекторий), сравнивать их с точки зрения некоторых критериев оценки риска. При этом имитируется актуарное управление согласно основным методам финансирования, описанным выше. Возмущения могут накладываться на три входных временных ряда: инфляции, инвестиционной доходности (в том числе, по отдельным классам инвестиций), уровня зарплат; четвертым источником возмущений служит случайная смертность членов схемы. Читатель, интересующийся подробностями, может обратиться к указанному выше ресурсу.

Ниже приводятся примеры для модели пенсионного финансирования, в общем аналогичной введенной выше, в разделах 2 – 9. В примерах будем использовать модель с двумя „источниками неопределенности“:

(а) случайной инвестиционной доходностью;

(б) случайной смертностью членов схемы.

Напомним, что в разделе 9 рассматривались модели со случайной инвестиционной доходностью, но стационарной популяцией участников. Правило изменения численности поколений („старения“возрастных когорт) задавалось соотношением

$$s(t+1, x+1) = s(t, x)p_x.$$

Теперь мы заменим эту формулу на

$$s(t+1, x+1) = s(t, x) - d(t, x), \tag{39}$$

[6] Эта версия создана при частичной поддержке ГУ–ВШЭ, Национального фонда подготовки кадров и Всемирного Банка.

где $d(t,x)$ – число умерших из когорты, моделируемое биномиальной случайной величиной с параметрами $s(t,x)$ и $q_x = 1-p_x$ (т.о. предполагается, что смерти отдельных участников происходят независимо и равновероятно). Начальные размеры когорт $s(0,x)$ будем считать заданными, но произвольными. Таким образом, популяция уже не будет стационарной. В остальном модель остается прежней, в частности, единственная причина выбытия из популяции участников – смертность, пенсии выплачиваются только по старости.

Основным уравнением остается уравнение (1) с заменой $r = r_{t+1}$; теперь все входящие в него величины случайны, в том числе пенсионные выплаты B_t, зависящие от числа пенсионеров.

Инвестиционную доходность будем считать сначала постоянной и равной 6% годовых, затем будем придавать ей случайные возмущения, задавая r_t формулой

$$1 + r_t = (1,06) \cdot (1 + n_t^*),$$

где n_t^* задается AR(1) процессом для логарифма:

$$\ln(1 + n_{t+1}^*) = \gamma \ln(1 + n_t^*) + \sigma \varepsilon_t$$

где параметры $\gamma = 0,68$, $\sigma = 0,014$; ошибки ε_t – независимые стандартно нормальные величины.

Рассматривается условная популяция участников пенсионной схемы общей численностью в начальный момент 5320 человек, из них 128 пенсионеров. Пенсионный возраст 60 лет. Используется та же таблица смертности, что и в примерах разделов 3 и 4. Так как примеры будут относиться к агрегатному финансированию (15) и методу „закрытого фонда"(22), играет роль только суммарный фонд заработной платы, и можно не учитывать распределение зарплаты по возрастам. Поэтому будем считать, что в момент 0 все работающие участники получают одинаковую среднюю зарплату 2894,64 руб. в месяц. Для простоты и наглядности не будем предполагать индексации пенсий, наличия инфляции и прироста зарплат. В случае схемы с определенными выплатами зададим размер пенсии 1070,30 руб. в месяц. Имитируется деятельность актуария: в схеме с определенными выплатами пересчитывается норма взноса, в схеме с определенными взносами – величина пенсии. При этом предполагается, что актуарий использует „в среднем правильные"значения смертности (пользуется той же таблицей смертности, что используется для имитации „реальной“смертности) и инвестиционной доходности (пользуется ставкой 6% годовых).

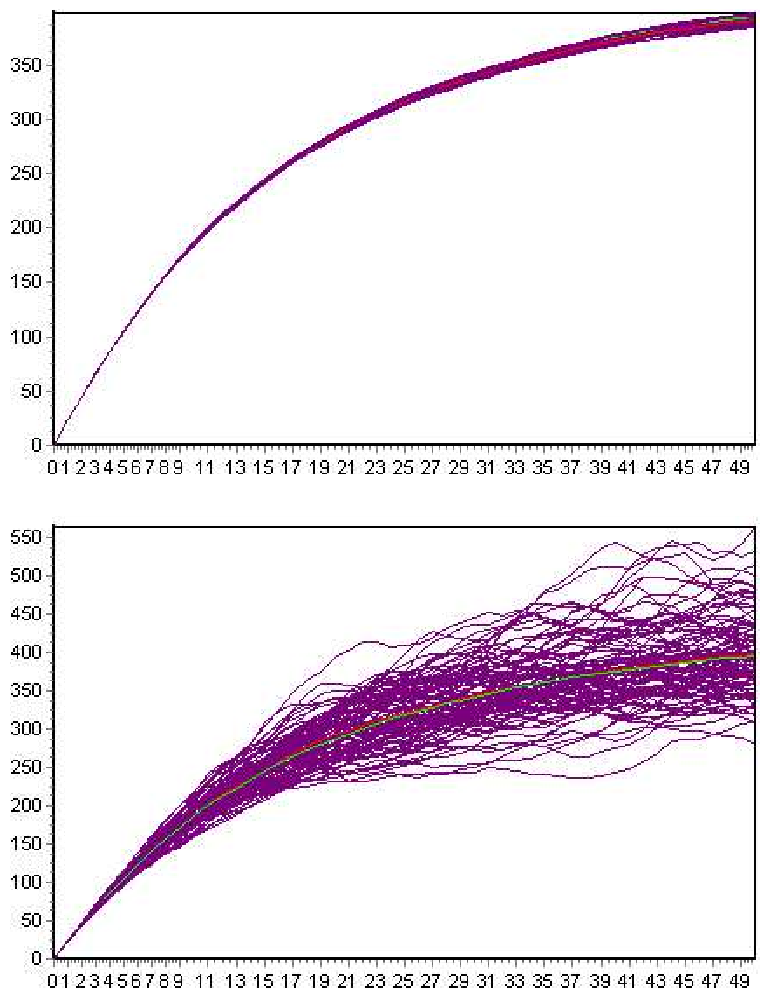

Рис. 5. Имитация пенсионного фонда F_t при агрегатном методе с ежегодным актуарным оцениванием. Вверху – случайная смертность, неслучайная инвестиционная доходность. Внизу – случайная смертность и случайная инвестиционная доходность. 100 имитаций.

На рис. 5 приведен пример анализа чувствительности для случая агрегатного финансирования с ежегодным актуарным оценивание. Как сказано выше, метод анализа чувствительности состоит в анализе изменений, порождаемых возмущением одного параметра. Вверху – случайная смертность, неслучайная инвестиционная доходность. Внизу – случайная смертность, случайная инвестиционная доходность. Видно, что возмущения, привносимые разбросом инвестиционной доходности, даже при сравнительно малой волатильности, более значительны, чем привносимые разбросом смертности. Таким образом, инвестиционный риск при данном наборе параметров оказывается более существенным. Если, однако, уменьшить число участников схемы, то влияние риска смертности повысится. Актуарное оценивание, как видно из рисунка, не слишком эффективно, если актуарий ориентируется на среднее значение процентной доходности. Так как мы моделируем доходность AR(1) процессом, значения для соседних лет зависимы. Эффективность оценивания можно повысить, если имитировать использование актуарием некоторой более эффективной модели оценки доходности. Так, на рис. 6 приведены результаты для случая, когда актуарий оценивает будущую доходность как скользящее среднее,

$$\hat{r} = 0,2 \cdot r_{t-1} + 0,5 \cdot r_t + 0,3 \cdot \bar{r},$$

где $\bar{r} = 0,06$ – среднее значение, r_t – доходность последнего года, предшествующего оценке, r_{t-1} – доходность предыдущего года. Из сравнения графиков видно, что это значительно улучшает качество актуарного управления, уменьшая разброс значений фонда вокруг прогнозной траектории. Вообще говоря, во многих других случаях анализа чувствительности эффекты бывают не столь очевидны. Тогда требуется применение статистических методов, например, для сравнения выборок смоделированных значений („сечений“пучка траекторий), взятых для одного и того же момента времени.

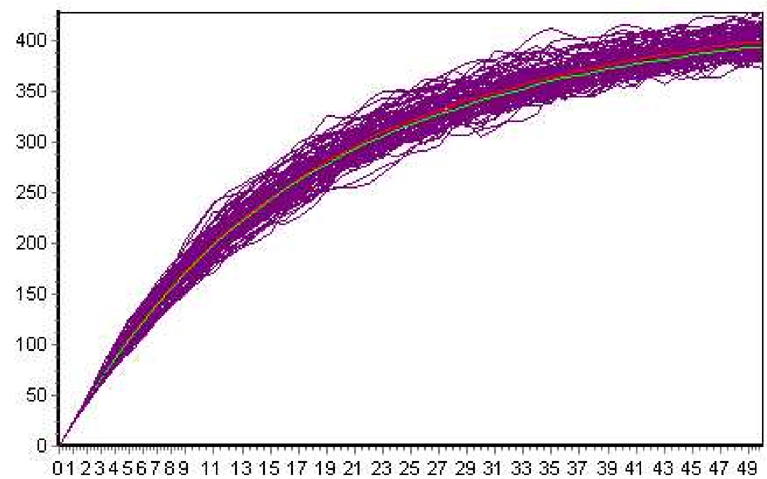

Рис. 6. Имитация пенсионного фонда F_t при агрегатном методе с ежегодным актуарным оцениванием при использовании актуарием оценки нормы доходности инвестиций в виде скользящего среднего. 100 имитаций.

Рис. 7 представляет собой иллюстрации к методу „закрытого фонда“. Вверху – DB схема, внизу – DC схема (ежегодный перерасчет пенсий). Вероятность неплатежеспособности для DB схемы оценивается в 0,35, то есть 35 траекторий из 100 заходят в область отрицательных значений. В обоих случаях смертность случайна, инвестиционная доходность – неслучайна.

Анализ чувствительности накопительных пенсионных схем представляет наиболее реальный путь исследования различных рисков, которым такие схемы подвержены, и способов актуарного и инвестиционного управления ими. Здесь открывается широкое поле для исследований. В частности, такие исследования могут иметь практическое значение для установления тех или иных нормативов государственного регулирования пенсионных систем, их актуарного оценивания, ограничений на инвестирование фондов и др. Такие нормативы просто невозможно научно обосновать никаким иным путем, кроме численного моделирования, так как аналитические модели слишком для этого сложны. Вероятно, это особенно актуально для России, где стандарты актуарного оценивания пока не выработаны (например, нет таблиц смертности, нормативов для используемых в расчетах процентных ставок и т.д.), не накоплен практический опыт в этой области. На Западе такие нормативы и практики регулирования были выработаны в течение десятилетий проб и ошибок, причем этот процесс никак нельзя назвать завершенным (см., например, (Davis, 1995)). Применение современных компьютерных технологий могло бы помочь сократить этот длинный путь и избежать многих тяжелых ошибок. Не будем забывать, что за пенсионными схемами стоят люди, чье будущее зависит от их эффективности, платежеспособности и т.д. Проблемы регулирования и актуарного оценивания во многом сводятся к проблеме *чисел*; в нашей стране, к сожалению, этому аспекту пока уделяется меньше внимания, чем он заслуживает.

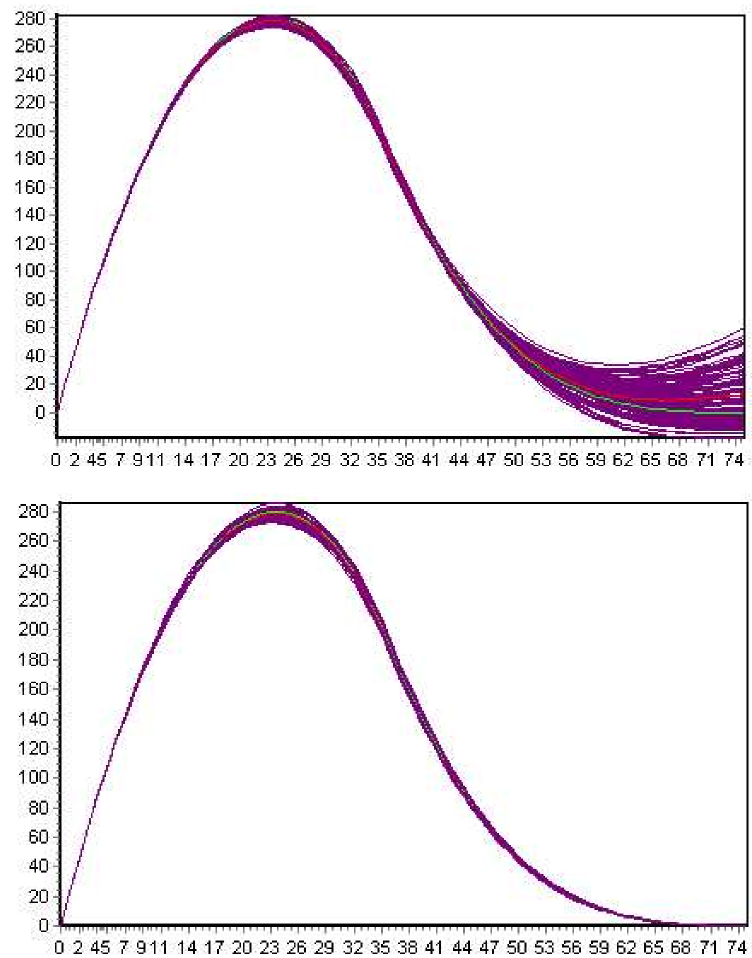

Рис. 7. Имитация ежегодного актуарного оценивания методом "закрытого фонда". Зависимость фонда F_t от времени. Случайная смертность, неслучайная инвестиционная доходность. Вверху - DB схема, внизу - DC схема. 100

имитаций.

Приложение. Некоторые актуарные обозначения

Ниже для удобства читателя расшифровываются использованные актуарные обозначения. Подробнее см., например, (Гербер, 1995); (Bowers et al., 1997).

${}_kp_x$ – вероятность того, что человек возраста ровно x (лет) доживет до возраста $x+k$;

p_x – вероятность того, что человек возраста ровно x доживет до возраста $x+1$;

$q_x = 1 - p_x$ – вероятность того, что человек возраста ровно x не доживет до $x+1$;

$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k_k p_x$;

$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k_k p_x$;

${}_{n|}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\infty} v^k_k p_x$;

$\ddot{a}_{\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k$.

ЛИТЕРАТУРА

Anderson, A.W. (1992) *Pension Mathematics for Actuaries*, 2nd ed. – Winsted, Connecticut: Actex Publications.

Bedard, D., and Dufresne, D. (2001) *Pension Funding with Moving Average Rates of Return.* – Scandinavian Actuarial Journal, 1, 1 – 17.

Benjamin, S. (1989) *Driving the pension fund.* – J. of the Institute of Actuaries, 116, 717 - 735.

Berin, B.N. (1989) *Fundamentals of Pension Mathematics.* – Shaumburg, Illinois: Society of Actuaries.

Bolton Offutt Donovan, Inc. (2000) *Actuarial Aspects of Cash Balance Plans.* – Report for the Society of Actuaries.

Boulier, J-F., Michel, S., and Wisnia, V. (1996) *Optimizing investment and contribution policies of a defined benefit pension fund.* – Proceedings of the 6th AFIR International Colloquium, 1, 593 – 607.

Bowers, N.L., Hickman, J.C., and Nesbitt, C.J. (1976) *Introduction to the Dynamics of Pension Funding.* – Trans. Society of Actuaries, XXVIII, 177 – 203.

Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., and Nesbitt, C.J. (1997) *Actuarial Mathematics*, 2nd edition. – Shaumburg, Illinois: Society of Actuaries.

Cairns, A. (2000) *Some notes on the dynamics and optimal control of stochastic pension fund models in continuous time.* – ASTIN Bulletin, 30, 1, 19 – 55.

Committee on Retirement Systems Research (1998) *Survey of Asset Valuation Methods for Defined Benefit Pension Plans.* – Shaumburg, Illinois: Society of Actuaries.

Cooper, S.L., and Hickman, J.C. (1967) *A Family of Accrued Benefit Actuarial Cost Methods.* – Trans. Society of Actuaries, XIX, 53 – 59.

Crosson, W.H. (1979) *Basic Funding Methods and Actuarial Assumptions.* – Record of the Society of Actuaries, 5, 2.

Davis, E.P. (1995) *Pension Funds.* – Oxford: Clarendon Press.

Daykin, C.D., Pentikäinen, T., and Pesonen, M. (1994) The Practical Risk Theory for Actuaries. – Chapman and Hall.

Dufresne, D. (1986) *Pension funding and random rates of return.* – In: M. Goovaerts et al., eds., *Insurance and Risk Theory,* Reidel, Dordrecht.

Dufresne, D. (1988) *Moments of pension fund contributions and fund levels when rates of return are random.* – J. of the Institute of Actuaries, 115, 535 – 544.

Dufresne, D. (1989) *Stability of pension systems when rates of return are random.* – Insurance: Mathematics and Economics, 8, 71 –76.

Dynamic Financial Analysis Committee (1999) *DFA Research Handbook.* – Casualty Actuarial Society, www.casact.org/reserch/dfa.

Haberman, S. (1994) *Autoregressive rates of return and the variability of pension contributions and fund levels for a defined benefits pension scheme.* – Insurance: Mathematics and Economics, 14, 219 – 240.

Haberman, S., and Sung, J.-H. (1994) *Dynamic approaches to pension funding.* – Insurance: Mathematics and Economics, 15, 151 – 162.

Haberman, S. (1997) *Stochastic investment returns and contribution rate risk in a defined benefit pension scheme.* – Insurance: Mathematics and Economics, 19, 127 – 139.

Haberman, S., and Wong, L.Y.P. (1997) *Moving average rates of return and the variability of pension contributions and fund levels for a defined benefits pension scheme.* – Insurance: Mathematics and Economics, 20, 115 – 135.

Khorasanee, Z. (1996) *Deterministic Modeling of Defined-Contribution Pension Funding.* – North American Actuarial J., 1, 4, 83 – 99.

Loads, D. (1992) *Instability in pension funding.* – Trans. Intern. Congress of Actuaries, 2, 137 - 154.

Maynard, J.C. (1992) *Pricing defined-benefit pension plans with indexed benefits.* – Trans. Society of Actuaries, 44, 193 – 246.

O'Brien, T. (1986) *A stochastic-dynamic approach to pension funding.* – Insurance: Mathematics and Economics, 5, 141 – 146.

O'Brien, T. (1987) *A two-parameter family of pension contribution functions and stochastic optimization.* – Insurance: Mathematics and Economics, 6, 129 – 134.

Owadally, M.I., and Haberman, S. (1999) *Pension Fund Dynamics and Gains/Losses Due to Random Rates of Investment Return.* – North American Actuarial Journal, 3, 3, 105 – 118.

Owadally, M.I., and Haberman, S. (2000) *Pension Plan Asset Valuation Methods.* – Paper presented at the 35th Actuarial Research Conference, Quebec City, Quebec, Canada.

Shieber, S., and Shoven, J. (Eds.) (1997) *Public Policy Toward Pensions.* – MIT Press.

Sherris, M. (1995) *The valuation of option features in retirement benefits.* – J. of Risk and Insurance, 62, 509 – 535.

Trowbridge, C.L. (1952) *Fundamentals of Pension Funding.* - Trans. Society of Actuaries, IV, 17 – 43.

Trowbridge, C.L. (1963) *The Unfunded Present Value Family of Pension Funding Methods.* – Trans. Society of Actuaries, XV, 151 – 169.

Баскаков, В.Н. и Баскакова, М.Е. (1998) *Пенсии для мужчин и женщин.* – Москва, Московский философский фонд, 1998.

Гербер, Х. (1995) *Математика страхования жизни.* – Пер. с англ., М.: „Мир“.

Чэдберн, Р. и Хэберман, С. (1996) *Основы актуарной математики.* – Пер. с англ., Кемерово.

Шоломицкий, А.Г. (2002) *Обзор актуарных методов финансирования накопительных песий.* – М.: ЦЭМИ РАН, препринт # WP/2002/136.